Musterlösungen zur Serie 4: Flächen und ihre Tangentialebenen

1. Aufgabe (i) Bestimmen Sie die Schnittpunkte (falls solche Schnittpunkte existieren) der drei Koordinatenachsen mit der Tangentialebene im Punkt $(1,1,1)$ an die Fläche

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; 2xyz - e^{xyz-1} = 1\}.$$

(ii) Geben Sie die Schnittgeraden dieser Tangentialebene mit den drei Koordinatenebenen an.

Lösung (i) Eine bestimmende Gleichung für M ist $F(x,y,z) := 2xyz - e^{xyz-1} - 1 = 0$. Folglich ist

$$\partial_x F(1,1,1)u + \partial_y F(1,1,1)v + \partial_z F(1,1,1)w = u + v + w = 0$$

die Gleichung für die Komponenten der Tangentialvektoren an M im Punkt $(1,1,1)$, d.h.

$$T_{(1,1,1)}M = \left\{ \begin{bmatrix} 1+u \\ 1+v \\ 1+w \end{bmatrix} : \; u+v+w = 0 \right\}.$$

Im Schnittpunkt der Tangentialebene mit der z-Achse ist $1+u = 1+v = u+v+w = 0$ und folglich $w = 2$, also ist der Schnittpunkt $(0,0,3)$.
Im Schnittpunkt der Tangentialebene mit der y-Achse ist $1+u = 1+w = u+v+w = 0$ und folglich $v = 2$, also ist der Schnittpunkt $(0,3,0)$.
Im Schnittpunkt der Tangentialebene mit der x-Achse ist $1+v = 1+w = u+v+w = 0$ und folglich $u = 2$, also ist der Schnittpunkt $(3,0,0)$.

(ii) Ein Punkt $(1+u, 1+v, 1+w)$ der Tangentialebene liegt in der Schnittgeraden mit der Ebene $x = 0$ genau dann, wenn $1+u = u+v+w = 0$, also $u = -1$, $v = 1-w$, w beliebig, also ist die Schnittgerade gleich

$$\{(0, 2-w, 1+w) : \; w \in \mathbb{R}\}.$$

Ein Punkt $(1+u, 1+v, 1+w)$ der Tangentialebene liegt in der Schnittgeraden mit der Ebene $y = 0$ genau dann, wenn $1+v = u+v+w = 0$, also $v = -1$, $u = 1-w$, w beliebig, also ist die Schnittgerade gleich

$$\{(2-w, 0, 1+w) : \; w \in \mathbb{R}\}.$$

Ein Punkt $(1+u, 1+v, 1+w)$ der Tangentialebene liegt in der Schnittgeraden mit der Ebene $z = 0$ genau dann, wenn $1+w = u+v+w = 0$, also $w = -1$, $u = 1-v$, v beliebig, also ist die Schnittgerade gleich

$$\{(2-v, 1+v, 0) : \; v \in \mathbb{R}\}.$$

2. Aufgabe Zeigen Sie, dass die Tangentialebene in einem beliebigen Punkt an das hyperbolische Paraboloid

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; z = x^2 - y^2, \; x, y \in \mathbb{R}\}$$

die Menge M in genau zwei Geraden schneidet.

Lösung Es sei $f(x, y) := x^2 - y^2$. Dann gilt $\partial_x f(x, y) = 2x$ und $\partial_y f(x, y) = -2y$. Daher ist die Tangentialebene an M in einem Punkt $(x_0, y_0, x_0^2 - y_0^2) \in M$ gegeben durch die Gleichung

$$z - x_0^2 + y_0^2 = 2x_0(x - x_0) - 2y_0(y - y_0).$$

Die Schnittmenge dieser Tangentialebene mit M wird also beschrieben durch

$$\left.\begin{array}{rcl} z & = & x^2 - y^2, \\ z - x_0^2 + y_0^2 & = & 2x_0(x - x_0) - 2y_0(y - y_0). \end{array}\right\} \tag{1}$$

Wenn man die beiden rechten Seiten dieses Gleichungssystems gleichsetzt, erhält man

$$(x - x_0)^2 = (y - y_0)^2,$$

d.h. $y = y_0 \pm (x - x_0)$. Dies in die erste Gleichung eingesetzt ergibt $z = x^2 - (y_0 \pm (x - x_0))^2 = \mp 2x(y_0 \mp x_0) - (y_0 \mp x_0)^2$. Also ist das Gleichungssystem (1) äquivalent zu

$$\left.\begin{array}{rcl} z & = & -2x(y_0 - x_0) - (y_0 - x_0)^2, \\ y & = & x + y_0 - x_0, \end{array}\right\} \text{ oder } \left.\begin{array}{rcl} z & = & 2x(y_0 + x_0) - (y_0 + x_0)^2, \\ y & = & -x + y_0 + x_0. \end{array}\right\}$$

Das sind zwei Geraden, parametrisiert durch $x \in \mathbb{R}$.

3. Aufgabe Es sei M die Niveau-Menge der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : \; f(x, y, z) = xyz$$

mit dem Niveau Eins.
(i) Berechnen Sie eine Basis für die Tangentialebene im Punkt $(1/2, 1, 2)$ an M sowie den Gradienten von f im Punkt $(1/2, 1, 2)$.
(ii) Es sei P ein Punkt auf M im ersten Quadranten, d.h. $P = (x, y, \frac{1}{xy})$ mit $x > 0$ und $y > 0$. Ferner seien $(a, 0, 0)$ bzw. $(0, b, 0)$ bzw. $(0, 0, c)$ die Schnittpunkte der Tangentialebene in P an M mit der x- bzw. der y- bzw. der z-Achse. Zeigen Sie, dass das Produkt abc nicht von P abhängt (d.h. dass die Tangentialebene in P an M einen Tetraeder vom ersten Quadranten abschneidet, dessen Volumen nicht von dem Punkt P abhängt).

Lösung (i) Die Tangentialebene an M in einem Punkt (x_0, y_0, z_0) ist gleich

$$\begin{aligned} &(x_0, y_0, z_0) + \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; \langle \nabla f(x_0, y_0, z_0)), (x, y, z)\rangle = 0\} \\ &\quad = (x_0, y_0, z_0) + \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; xy_0z_0 + yx_0z_0 + zx_0y_0 = 0\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Folglich wird eine Basis in der Tangentialebene an M im Punkt $(1/2, 1, 2)$ gebildet durch zwei linear unabhängige Lösungen der linearen Gleichung

$$2x + y + \frac{1}{2}z = 0,$$

z. B. durch $(1/2, -1, 0)$ und $(0, -1, 2)$.

(ii) Der Schnittpunkt der Menge (2) mit der x-Achse ist der Punkt $(x_0 + x, 0, 0)$, wobei x bestimmt sind durch das Gleichungssytem

$$\left.\begin{array}{rcl} y_0 + y &=& 0, \\ z_0 + z &=& 0, \\ xy_0z_0 + yx_0z_0 + zx_0y_0 &=& 0, \\ x_0y_0z_0 &=& 1. \end{array}\right\} \tag{3}$$

Aus (3) folgt $x = 2x_0$. Analog erhält man, dass $(0, 3y_0, 0)$ bzw. $(0, 0, 3z_0)$ die Schnittpunkte der Menge (2) mit der y-Achse bzw. der z-Achse sind. Daraus folgt $a = 3x_0$, $b = 3y_0$, $c = 3z_0$ und folglich

$$abc = 27.$$