Musterlösungen zur Serie 5: Höhere Ableitungen und Taylor-Formel

1. Aufgabe Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y, z) := e^x \sin y \cos z.$$

(i) Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades von f im Punkt $(0, 0, 0)$.

(ii) Es sei P_2 sei das Taylor-Polynom zweiten Grades von f im Punkt $(0, 0, 0)$. Geben Sie ein (möglichst großes) $r > 0$ an mit der Eigenschaft, dass

$$|f(x, y, z) - P_2(x, y, z)| \leq 10^{-5} \text{ für alle } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2. \quad (1)$$

Lösung für (i) Es gilt

$$\partial_x f(x, y, z) = e^x \sin y \cos z, \ \partial_y f(x, y, z) = e^x \cos y \cos z, \ \partial_z f(x, y, z) = -e^x \sin y \sin z.$$

Daraus folgt

$$\nabla f(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad H_f(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Folglich ist das Taylor-Polynom zweiten Grades von f im Punkt $(0, 0, 0)$ (die Variablen des Taylor-Polynoms heißen u, v und w)

$$f(0, 0, 0) + \langle \nabla f(0, 0, 0), (u, v, w) \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(0, 0, 0)(u, v, w), (u, v, w) \rangle = v + uv.$$

Lösung für (ii) Es gilt nach der Taylor-Formel

$$\begin{aligned} f(x, y, z) - P_2(x, y, z) &= \frac{1}{3!} f'''(\theta x, \theta y, \theta z)((x, y, z), (x, y, z), (x, y, z)) \\ &= \sum_{j+k+l=3} \frac{1}{j!k!l!} \partial_x^j \partial_y^k \partial_z^l f(\theta x, \theta y, \theta z) x^j y^k z^l. \end{aligned} \quad (2)$$

Ferner ist $\partial_x^j \partial_y^k \partial_z^l f(\theta x, \theta y, \theta z)$ entweder gleich $e^{\theta x} \sin(\theta y) \cos(\theta z)$ oder gleich $e^{\theta x} \cos(\theta y) \cos(\theta z)$ oder gleich $e^{\theta x} \sin(\theta y) \sin(\theta z)$ oder gleich $e^{\theta x} \cos(\theta y) \sin(\theta z)$, also

$$|\partial_x^j \partial_y^k \partial_z^l f(\theta x, \theta y, \theta z) x^j y^k z^l| \leq e\, r^{j+k+l} \text{ für } 0 \leq \theta \leq 1 \text{ und } x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2 \leq 1.$$

Weil die Summe in (2) 10 Summanden enthält, folgt

$$|f(x, y, z) - P_2(x, y, z)| \leq 10 e r^3.$$

Eine hinreichende Bedingung an r für (1) ist also

$$r \leq \sqrt[3]{\frac{1}{e}} 10^{-2}.$$

2. Aufgabe Bestimmen Sie das Taylor-Polynom dritten Grades der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) := \sqrt{x^2+y^2},$$

im Punkt $(1,0)$.

Lösung Es gilt

$$\partial_x f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \partial_y f(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

also

$$\partial_x^2 f(x,y) = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}},\ \partial_y^2 f(x,y) = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}},\ \partial_x\partial_y f(x,y) = -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

Daraus folgt

$$\partial_x^3 f(1,0) = \partial_x^2\partial_y f(1,0) = \partial_y^3 f(1,0) = 0,\ \ \partial_x\partial_y^2 f(1,0) = -1.$$

Also ist das Taylor-Polynom dritten Grades von f im Punkt $(1,0)$ (die Variablen des Taylor-Polynoms heißen u und v)

$$\begin{aligned} f(1,0) &+ \partial_x f(1,0)u + \partial_y f(1,0)v + \frac{1}{2}\left(\partial_x^2 f(1,0)u^2 + \partial_y^2 f(1,0)v^2\right) + \partial_x\partial_y f(1,0)uv+ \\ &+\frac{1}{6}\left(\partial_x^3 f(1,0)u^3 + \partial_y^3 f(1,0)v^3\right) + \frac{1}{2}\left(\partial_x^2\partial_y f(1,0)u^2v + \partial_x\partial_y^2 f(1,0)uv^2\right) = \\ &= 1 + u + \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}uv^2. \end{aligned}$$