Musterlösungen zur Serie 8: Mehrdimensionale Integrale

1. Aufgabe Berechnen Sie $\int_X f(x)\,dx$ mit:

(a) $M = \{x \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x_1 \le x_2 \le 1\},\ f(x) = \dfrac{\sin x_2}{x_2}$,

(b) $M = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \le x_1 \le 1,\ 0 \le x_2 \le 1 - x_1,\ 0 \le x_3 \le 1 - x_1 - x_2\}$,
$f(x) = (1 + x_1 + x_2 + x_3)^{-3}$,

(c) $M = \left\{x \in \mathbb{R}^2 :\ x_1^2 + x_2^2 \le 2x_1\right\},\ f(x) = x_1^2 + x_2^2$,

(d) $M = \left\{x \in \mathbb{R}^3 :\ x_1^2 + x_2^2 \le x_3 \le \sqrt[4]{x_1^2 + x_2^2}\right\},\ f(x) = (x_1^2 + x_2^2)x_3$.

Lösung für (a) Es gilt

$$\int_M f(x)\,dx = \int_0^1 \left(\frac{\sin x_2}{x_2} \int_0^{x_2} dx_1\right)\,dx_2 = \int_0^1 \sin x_2\,dx_2 = 1 - \cos 1.$$

Lösung für (b) Es gilt

$$\begin{aligned}\int_M f(x)\,dx &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x_1} \left(\int_0^{1-x_1-x_2} \frac{dx_3}{(1 + x_1 + x_2 + x_3)^3}\right)\,dx_2\right)\,dx_1 = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\int_0^{1-x_1} \left(\frac{1}{(1 + x_1 + x_2)^2} - \frac{1}{4}\right)\,dx_2\right)\,dx_1 = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{x_1 + 1} - \frac{3 - x_1}{4}\right)\,dx_1 = \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \frac{5}{8}\right).\end{aligned}$$

Lösung für (c) Es gilt

$$M = \left\{(x, y) :\ (x-1)^2 + y^2 \le 1\right\} = \left\{(1 + r\cos\varphi, r\sin\varphi) :\ 0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\right\},$$

also

$$\begin{aligned}\int_M f(x)\,dx &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left((1 + r\cos\varphi)^2 + r^2\sin^2\varphi\right) r dr\,d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(1 + 2r\cos\varphi + r^2\right) r dr\,d\varphi = \frac{3}{2}\pi.\end{aligned}$$

Lösung für (d) Es gilt

$$M = \left\{(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) :\ r \ge 0,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ r^2 \le z \le \sqrt{r}\right\},$$

also

$$\int_M f(x)\,dx = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^{\sqrt{r}} r^3 z\,dz\,dr\,d\varphi = \pi\int_0^1 r^3(r-r^4)\,dr = \frac{3}{40}\pi.$$

2. Aufgabe Berechnen Sie die Volumina der folgenden Mengen:

(a) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x,y,z\geq 0,\ x^2+y^2\leq 1,\ x+y+z\leq\sqrt{2}\}$,

(b) $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+\frac{y^2}{4}\leq 1,\ 0\leq z\leq x^2+y^2\right\}$.

Lösung für (a) Das Volumen ist gleich

$$\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\left(\int_0^{\sqrt{2}-x-y} dz\right)\,dy\right)\,dx = \int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}}(\sqrt{2}-x-y)\,dy\right)\,dx =$$
$$= \int_0^1\left(\left(\sqrt{2}-x\right)\sqrt{1-x^2}-\frac{1-x^2}{2}\right)\,dx = \frac{\pi}{4}\sqrt{2}-\frac{2}{3}$$

wegen

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4},\quad \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{3},\quad \int_0^1(1-x^2)\,dx = \frac{2}{3}.$$

Lösung für (b) Es gilt

$$M = \left\{(r\cos\varphi, 2r\sin\varphi, z):\ 0\leq r\leq 1,\ 0\leq\varphi\leq 2\pi,\ 0\leq z\leq r^2\cos^2\varphi+4r^2\sin^2\varphi\right\},$$

also arbeiten wir mit "verallgemeinerten" Zylinderkoordinaten $x=r\cos\varphi, y=2r\sin\varphi, z$. Die entsprechende Funktionaldeterminante ist $2r$. Also folgt

$$\text{vol } M = 2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 dr\int_0^{r^2\cos^2\varphi+4r^2\sin^2\varphi} dz =$$
$$= 2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 r(r^2\cos^2\varphi+4r^2\sin^2\varphi)dr = 10\pi\int_0^1 r^3\,dr = \frac{5}{2}\pi.$$