Musterlösungen zur Serie 9: Kurvenintegrale

1. Aufgabe Berechnen Sie $\int_K v \cdot d\gamma$, wobei $v(x,y) = (xy, y-x)$ ist und $K \subset \mathbb{R}^2$ die orientierte Kurve ist, die von $(0,0)$ nach $(1,1)$ läuft und beschrieben ist durch

(a) $y^2 = x$,
(b) $y = x$,
(c) $y = x^2$.

Lösung für (a) Eine positiv orientierte Parametrisierung von K ist $\gamma(s) = (s^2, s)$ mit $s \in [0,1]$. Folglich ist

$$\int_K v \cdot d\gamma = \int_0^1 \langle (s^3, s-s^2), (2s, 1) \rangle ds = \int_0^1 \left(2s^4 - s^2 + s\right) ds = \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{17}{30}.$$

Lösung für (b) Eine positiv orientierte Parametrisierung von K ist jetzt $\gamma(s) = (s,s)$ mit $s \in [0,1]$, also

$$\int_K v \cdot d\gamma = \int_0^1 \langle (s^2, 0), (1,1) \rangle ds = \int_0^1 s^2\, ds = \frac{1}{3}.$$

Lösung für (c) Hier ist $\gamma(s) = (s, s^2)$ mit $s \in [0,1]$, also

$$\int_K v \cdot d\gamma = \int_0^1 \langle (s^3, s^2 - s), (1, 2s) \rangle ds = \int_0^1 \left(3s^3 - 2s^2\right) ds = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}.$$

2. Aufgabe Berechnen Sie $\int_K v \cdot d\gamma$, wobei

$$v(x,y,z) = (y^2 - z^2, z^2 - x^2, x^2 - y^2)$$

ist und $K \subset \mathbb{R}^3$ die geschlossene, stückweise glatte Kurve ist, die definiert ist durch

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = xyz = 0,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$$

und deren Orientierung dadurch gegeben ist, dass der Teil von K, der in der xy-Ebene liegt, gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen werden soll.

Lösung Die Kurve K ist aus drei glatten Stücken K_1 (in der xy-Ebene), K_2 (in der yz-Ebene) und K_1 (in der xz-Ebene) zusammengesetzt, die z.B. folgendermaßen positiv orientiert parametrisiert werden können:

$$\begin{aligned}
\gamma_1(s) &= (\cos s, \sin s, 0),\ 0 \leq s \leq \frac{\pi}{2}, \\
\gamma_2(s) &= (0, \cos s, \sin s),\ 0 \leq s \leq \frac{\pi}{2}, \\
\gamma_3(s) &= (\sin s, 0, \cos s),\ 0 \leq s \leq \frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\int_{K_1} v \cdot d\gamma_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \langle (\sin^2 s, -\cos^2 s, \cos^2 s - \sin^2 s), (-\sin s, \cos s, 0) \rangle =$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^3 s + \cos^3 s\right) ds = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 s) d\cos s = 2 \left[\cos s - \frac{\cos^3 s}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{4}{3}.$$

Analog berechnet man

$$\int_{K_j} v \cdot d\gamma_j = -\frac{4}{3} \text{ für } j = 2, 3,$$

also

$$\int_K v \cdot d\gamma = -4.$$

3. Aufgabe Besitzt das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, das definiert ist durch

$$v(x, y, z) := (e^y \sin z, xe^y \sin z + z, xe^y \cos z + y + 2z),$$

ein Potential? Wenn ja, so berechnen Sie ein solches Potential.

Lösung: Aus $\partial_x \phi(x, y, z) = e^y \sin z$ folgt

$$\phi(x, y, z) = e^y x \sin z + a(y, z).$$

Dies in $\partial_y \phi(x, y, z) = e^y \sin z + z$ eingesetzt ergiebt

$$e^y x \sin z + \partial_y a(y, z) = e^y \sin z + z, \text{ also } \partial_y a(y, z) = z,$$

also

$$\phi(x, y, z) = e^y x \sin z + yz + b(z).$$

Dies in $\partial_z \phi(x, y, z) = xe^y \cos z + y + 2z$ eingesetzt ergiebt

$$e^y x \cos z + y + b'(z) = xe^y \cos z + y + 2z, \text{ also } b'(z) = 2z,$$

also

$$\phi(x, y, z) = e^y x \sin z + yz + z^2 + \text{const.}$$