Übungsaufgaben zum Beifach Mathematik: Analysis II

Serie 2: Konvergenz von Funktionen zweier Veränderlicher.
Abgabetermin: 12.5.

1. Aufgabe (20 Punkte) Überprüfen Sie, ob für die unten angegebenen Funktionen $f: (0,\infty)\times(0,\infty)\to\mathbb{R}$ die Grenzwerte

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \text{ und/oder } \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) \text{ und/oder } \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$$

existieren, und berechnen Sie diese gegebenenfalls:

(a) $f(x,y) = x^y$,

(b) $f(x,y) = x\sin 2^y$,

(c) $f(x,y) = x\,2^{-y}$,

(d) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}\sin y$,

(e) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}\sin\dfrac{y}{x}$,

(f) $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{y}$,

(g) $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^{xy}$,

(h) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$,

(i) $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$,

(j) $f(x,y) = \dfrac{1}{y}\,x^{1/y}$.

***Aufgabe (10 Punkte)** Überprüfen Sie, ob der Grenzwert

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{x}{y}\ln(1+y)\right)$$

existiert und berechnen Sie ihn gegebenenfalls.