

# Übungsaufgaben zum Beifach Mathematik: Analysis II

Serie 4: Flächen und Tangentialebenen, Abgabetermin: 26.5.

**1. Aufgabe (5 Punkte)** (i) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der drei Koordinatenachsen mit der Tangentialebene im Punkt  $(1, 1, 1)$  an die Fläche

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2xyz - e^{xyz-1} = 1\}.$$

(ii) Geben Sie die Schnittgeraden dieser Tangentialebene mit den drei Koordinatenebenen an.

**2. Aufgabe (5 Punkte)** Zeigen Sie, dass die Tangentialebene in einem beliebigen Punkt an das hyperbolische Paraboloid

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2, x, y \in \mathbb{R}\}$$

die Menge  $M$  in genau zwei Geraden schneidet.

**3. Aufgabe (10 Punkte)** Es sei  $M$  die Niveau-Menge der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : f(x, y, z) = xyz$$

mit dem Niveau Eins.

(i) Berechnen Sie eine Basis für die Tangentialebene im Punkt  $(1/2, 1, 2)$  an  $M$  sowie den Gradienten von  $f$  im Punkt  $(1/2, 1, 2)$ .

(ii) Es sei  $P \in M$  ein Punkt im ersten Quadranten. Ferner seien  $(a, 0, 0)$  bzw.  $(0, b, 0)$  bzw.  $(0, 0, c)$  die Schnittpunkte der Tangentialebene in  $P$  an  $M$  mit der  $x$ - bzw. der  $y$ - bzw. der  $z$ -Achse. Zeigen Sie, dass das Produkt  $abc$  nicht von  $P$  abhängt (d.h. dass die Tangentialebene in  $P$  an  $M$  einen Tetraeder vom ersten Quadranten abschneidet, dessen Volumen nicht von dem Punkt  $P$  abhängt).