Übungsaufgaben zum Beifach Mathematik: Analysis II

Serie 4: Flächen und Tangentialebenen, Abgabetermin: 26.5.

1. Aufgabe (5 Punkte) (i) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der drei Koordinatenachsen mit der Tangentialebene im Punkt $(1, 1, 1)$ an die Fläche

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2xyz - e^{xyz-1} = 1\}.$$

(ii) Geben Sie die Schnittgeraden dieser Tangentialebene mit den drei Koordinatenebenen an.

2. Aufgabe (5 Punkte) Zeigen Sie, dass die Tangentialebene in einem beliebigen Punkt an das hyperbolische Paraboloid

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = x^2 - y^2, \ x, y \in \mathbb{R}\}$$

die Menge M in genau zwei Geraden schneidet.

3. Aufgabe (10 Punkte) Es sei M die Niveau-Menge der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : \ f(x, y, z) = xyz$$

mit dem Niveau Eins.
(i) Berechnen Sie eine Basis für die Tangentialebene im Punkt $(1/2, 1, 2)$ an M sowie den Gradienten von f im Punkt $(1/2, 1, 2)$.
(ii) Es sei $P \in M$ ein Punkt im ersten Quadranten. Ferner seien $(a, 0, 0)$ bzw. $(0, b, 0)$ bzw. $(0, 0, c)$ die Schnittpunkte der Tangentialebene in P an M mit der x- bzw. der y- bzw. der z-Achse. Zeigen Sie, dass das Produkt abc nicht von P abhängt (d.h. dass die Tangentialebene in P an M einen Tetraeder vom ersten Quadranten abschneidet, dessen Volumen nicht von dem Punkt P abhängt).