Übungsaufgaben zum Beifach Mathematik: Analysis II

Serie 7: Extrema mit Nebenbedingungen, Abgabetermin: 13.6.

1. Aufgabe (6 Punkte) Berechnen Sie das Maximum und das Minimum der Menge

$$\{x - y - z : \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ x^2 + 2y^2 - 1 = 3x - 4z = 0\}.$$

2. Aufgabe (7 Punkte) Auf der Sphäre $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ \|x\| = 1\}$ seien im Punkt $x_1 = (1, 0, 0)$ die Masse $m_1 = 1$, im Punkt $x_2 = (0, 1, 0)$ die Masse $m_2 = 2$ und im Punkt $x_3 = (0, 0, 1)$ die Masse $m_3 = 3$ konzentriert. Wie muß man den Punkt $x \in S$ wählen, damit das Trägheitsmoment

$$\sum_{j=1}^{3} m_j \|x - x_j\|^2$$

des Massepunkte-Systems x_1, x_2, x_3 bzgl. x minimal wird? Dabei ist jeweils $\| \cdot \|$ die Euklidische Norm in $\mathbb{R}^3$.

3. Aufgabe (7 Punkte) Finden Sie auf dem Ellipsoid

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8\}$$

Punkte, deren Abstände von dem Punkt $(0, 0, 3)$ minimal bzw. maximal sind. Wie groß sind diese extremalen Abstände?

***Aufgabe (10 Punkte)** Besitzt die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) = xy + xz + yz,$$

bzgl. der Nebenbedingung $2x^3y^2z + 4x^2 + 5y^2 + 6z^2 = 17$ im Punkt $(1, 1, 1)$ ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum oder keines von beiden?