6.3 Spektralzerlegung normaler Operatoren

© M. Roczen und H. Wolter
Preview zur aktuellen Fassung:
Lineare Algebra individuell
Online Ver. 0.52, 23.6.2005
Alle Rechte vorbehalten

6/3/1

Mit Normalformen für die Matrix eines Endomorphismus haben wir uns bereits unter recht allgemeinen Voraussetzungen befasst. Einschränkungen hinsichtlich der zugelassenen Basen oder spezielle Forderungen an den betrachteten Endomorphismus führen hier zu neuen Resultaten.

V bezeichnet wieder einen unitären $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Satz – Definition. (*adjungierter Endomorphismus*)

$\varphi : V \to V$ *sei ein Endomorphismus.*

(1) *Es existiert genau ein Endomorphismus* $\varphi^\star$ *von* V*, so dass für beliebige* $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ *die Bedingung* $<\varphi^\star(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}> = <\boldsymbol{v}, \varphi(\boldsymbol{w})>$ *erfüllt ist.*

$\varphi^\star$ heißt der zu φ *adjungierte Endomorphismus* des unitären Vektorraumes V.

Diese Endomorphismen sind auf dem unitären Standardraum $\mathbb{K}^n$ durch Multiplikation mit einer hermiteschen Matrix A gegeben.

(2) *Ist* $\mathcal{B}$ *eine Orthonormalbasis von* V*, so gilt* $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi^\star) = {}^{\mathrm{t}}\overline{\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)}$.

(3) φ heißt *selbstadjungiert*, falls $\varphi = \varphi^\star$ ist.
Diese Bedingung ist dazu äquivalent, dass $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ *für eine* (*und dann auch für jede andere*) *Orthonormalbasis* $\mathcal{B}$ *von* V *eine hermitesche Matrix ist.*

Beweis. (1) Die Eindeutigkeit von $\varphi^\star$ ergibt sich daraus, dass das Skalarprodukt nicht ausgeartet ist: Sind nämlich ψ und η Endomorphismen mit $<\psi(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}> = <\eta(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}>$ für alle $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$, dann folgt

$$<(\psi - \eta)(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}> = <\psi(\boldsymbol{v}) - \eta(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}> = 0$$

für beliebige Vektoren $\boldsymbol{w}$, daher $(\psi - \eta)(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ für $\boldsymbol{v} \in V$, also $\psi = \eta$.
Zum Beweis der Existenz von $\varphi^\star$ wählen wir eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V und setzen $A := \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$. Bezeichnet ψ den Endomorphismus mit der Matrix $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\psi) = {}^{\mathrm{t}}\overline{A}$ und sind $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{K}^n$ die Koordinatentupel von $\boldsymbol{v}$ bzw. $\boldsymbol{w}$, so ergibt sich

$$<\psi(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}> = {}^{\mathrm{t}}(\overline{A} \cdot {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{x}) \cdot {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{y} = \overline{\boldsymbol{x}} \cdot (A \cdot {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{y}) = <\boldsymbol{v}, \varphi(\boldsymbol{w})>.$$

$\varphi^\star = \psi$ ist daher die eindeutig bestimmte lineare Abbildung mit der geforderten Eigenschaft.
(2) ist nun offensichtlch, und die Eigenschaft aus (3) folgt nach (2). ❑

Vgl. 6/2/14 (1).

Wir sehen insbesondere: Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist der adjungierte Operator $\varphi^\star$ bezüglich einer Orthonormalbasis durch die Transponierte der Matrix von φ gegeben. Diese Eigenschaft besitzt auch die duale Abbildung φ^* (die allerdings kein Endomorphismus von V ist); für beide wurden hier sehr ähnliche Symbole gewählt. Einzelne Gemeinsamkeiten zeigt folgende

Bemerkung. $\varphi, \psi : V \to V$ seien Endomorphismen und $\alpha \in \mathbb{K}$. 6/3/2

(1) $(\varphi^\star)^\star = \varphi$.

(2) $(\varphi + \psi)^\star = \varphi^\star + \psi^\star$.

(3) $(\alpha\varphi)^\star = \overline{\alpha}\varphi^\star$.

(4) $(\varphi \cdot \psi)^\star = \psi^\star \cdot \varphi^\star$.

(5) Ist φ Automorphismus von V, so ist auch $\varphi^\star$ Automorphismus, und es gilt $(\varphi^\star)^{-1} = (\varphi^{-1})^\star$.

Beweis. (1) ergibt sich beispielsweise so:

$$<\varphi^\star(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}> = <\boldsymbol{v}, \varphi(\boldsymbol{w})> \quad \text{für alle } \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V,$$

Ebenso hätten wir (1) aus den Matrixdarstellungen für φ, $\varphi^\star$ ablesen können.

daraus folgt (nach Vertauschen der Einträge und komplexer Konjugation)

$$<(\varphi^\star)^\star(\boldsymbol{w}),\boldsymbol{v}> = <\boldsymbol{w},\varphi^\star(\boldsymbol{v})> = <\varphi(\boldsymbol{w}),\boldsymbol{v}> \quad \text{für } \boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in V,$$

daher $<(\varphi^\star)^\star(\boldsymbol{w})-\varphi(\boldsymbol{w}),\boldsymbol{v}> = 0$ für alle $\boldsymbol{v}\in V$. Da das Skalarprodukt nicht ausgeartet ist, ergibt sich $(\varphi^\star)^\star(\boldsymbol{w})-\varphi(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{0}$ für beliebige Vektoren $\boldsymbol{w}\in V$, d.h. $(\varphi^\star)^\star = \varphi$.
(2) – (4) verbleiben als Übungsaufgaben. Alle Eigenschaften können – weniger elegant – auch auf Rechenregeln für Matrizen zurückgeführt werden. ❏

Grundlegendes Resultat in diesem Abschnitt ist die nachfolgende Beschreibung der Struktur selbstadjungierter Endomorphismen.

Satz. (*Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren*) 6/3/3

φ sei ein selbstadjungierter Endomorphismus des unitären $\mathbb{K}$-Vektorraumes V. Dann existiert eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V, die aus Eigenvektoren besteht. Es gilt

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \mathrm{diag}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\,, \quad \alpha_i\in\mathbb{R}.$$

Dass die Eigenwerte reell sind, ist insbesondere im Fall $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ bemerkenswert.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass das charakteristische Polynom χ_φ als Element von $\mathbb{C}[X]$ nur reelle Nullstellen besitzt:
Dazu kann nach Wahl einer Orthonormalbasis und eventueller Skalarerweiterung o.B.d.A. $V=\mathbb{C}^n$ als unitärer komplexer Standardraum gewählt werden. $\alpha\in\mathbb{C}$ sei nun eine Nullstelle von χ_φ. Dann existiert ein Vektor $\boldsymbol{v}\in\mathbb{C}^n\setminus\{\boldsymbol{0}\}$, für den $\varphi(\boldsymbol{v})=\alpha\boldsymbol{v}$ ist. Aus $\varphi^\star=\varphi$ folgt

$$\overline{\alpha}\cdot\|\boldsymbol{v}\|^2 = <\alpha\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}> = <\varphi(\boldsymbol{v}),\boldsymbol{v}> = <\boldsymbol{v},\varphi(\boldsymbol{v})> = <\boldsymbol{v},\alpha\boldsymbol{v}> = \alpha\cdot\|\boldsymbol{v}\|^2\,,$$

wegen $\|\boldsymbol{v}\|\neq 0$ also $\overline{\alpha}=\alpha$ und damit $\alpha\in\mathbb{R}$.
Die Existenz einer aus Eigenvektoren von φ bestehenden Orthonormalbasis wird nun induktiv gezeigt. Für den Eigenvektor $\boldsymbol{v}\in V$ zum Eigenwert α ist $\mathbb{K}\boldsymbol{v}$ ein φ-invarianter Unterraum; darüber hinaus ist auch $W:=\{\boldsymbol{v}\}^\perp$ ein φ-invarianter Unterraum, denn $\boldsymbol{x}\in\{\boldsymbol{v}\}^\perp$ bedeutet $<\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}> = 0$, folglich

$$<\varphi(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{v}> = <\boldsymbol{x},\varphi(\boldsymbol{v})> = <\boldsymbol{x},\alpha\boldsymbol{v}> = \alpha<\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}> = 0\,.$$

Daher ist $V=\mathbb{K}\boldsymbol{v}\,\textcircled{\perp}\,W$ orthogonale Summe φ-invarianter Unterräume, und die Einschränkung $\varphi|_W$ ist ebenfalls selbstadjungiert. Wegen $\dim(W)=\dim(V)-1$ können wir induktiv die Gültigkeit der Behauptung für $\varphi|_W$ voraussetzen (der Fall $\dim(V)=1$ ist trivial).
Die gesuchte Orthonormalbasis ergibt sich aus $\|\boldsymbol{v}\|^{-1}\boldsymbol{v}$ und einer geeigneten Orthonormalbasis für W. ❏

Bei Skalarerweiterung vom Grundkörper $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{C}$ wird aus einer symmetrischen Matrix trivialerweise eine hermitesche.

Unter den Voraussetzungen des Satzes ist $V=V_1\,\textcircled{\perp}\,\ldots\,\textcircled{\perp}\,V_s$, wobei V_i die Eigenräume zu den paarweise verschiedenen Eigenwerten λ_i von φ bezeichnen. Mit den zugehörigen orthogonalen Projektionen π_i auf V_i ergibt sich

$$\varphi = \lambda_1\pi_1+\ldots+\lambda_s\pi_s\,;$$

dies ist die *Spektralzerlegung des selbstadjungierten Endomorphismus* φ.

Auch das Auffinden der Eigenwerte λ_i und der Eigenräume V_i heißt gelegentlich *Spektralzerlegung* von φ.

Der Satz besagt insbesondere, dass hermitesche Matrizen diagonalisierbar sind. Darüber hinaus wird dadurch nahe gelegt, beim Studium entsprechender Endomorphismen nur solche Basiswechsel zuzulassen, bei denen Orthonormalbasen in Orthonormalbasen überführt werden.

Definition. (*unitäre Matrix*) 6/3/4

Eine Matrix $A\in\mathrm{M}(n;\mathbb{K})$ heißt *unitär*, falls ${}^{\mathrm{t}}\overline{A}\cdot A=\mathrm{E}_n$ ist. Im Fall $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ werden unitäre Matrizen vorzugsweise *orthogonal* genannt.

Insbesondere ist $A\in\mathrm{M}(n;\mathbb{R})$ genau dann orthogonal, wenn ${}^{\mathrm{t}}A\cdot A=\mathrm{E}_n$.

Diese Matrizen bilden eine Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe $\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$, sie wird im Fall $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ die *unitäre Gruppe* $\mathrm{U}(n)$ und für $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ die *orthogonale Gruppe* $\mathrm{O}(n)$ genannt.

Der Kern des durch die Determinante definierten Homomorphismus $\det\colon \mathrm{U}(n) \to \mathbb{C}^*$ heißt *spezielle unitäre Gruppe*, er wird mit $\mathrm{SU}(n)$ bezeichnet. Der Kern des entsprechenden Homomorphismus $\det : \mathrm{O}(n) \to \mathbb{R}^*$ heißt *spezielle orthogonale Gruppe*, er wird mit $\mathrm{SO}(n)$ bezeichnet:

$$\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}) \mid {}^{\mathrm{t}}A \cdot A = \mathrm{E}_n\}\,, \quad \mathrm{SO}(n) = \{A \in \mathrm{O}(n) \mid \det(A) = 1\}\,,$$
$$\mathrm{U}(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{C}) \mid {}^{\mathrm{t}}\overline{A} \cdot A = \mathrm{E}_n\}\,, \quad \mathrm{SU}(n) = \{A \in \mathrm{U}(n) \mid \det(A) = 1\}\,.$$

Lemma. 6/3/5

(1) *Für eine Matrix* $A \in \mathrm{M}(n;\mathbb{K})$ *ist*
$$ {}^{\mathrm{t}}\overline{A} \cdot A = \mathrm{E}_n \iff A \cdot {}^{\mathrm{t}}\overline{A} = \mathrm{E}_n \iff \overline{A} \cdot {}^{\mathrm{t}}A = \mathrm{E}_n\,.$$

Insbesondere ist eine unitäre Matrix A invertierbar mit $A^{-1} = {}^{\mathrm{t}}\overline{A}$.

(2) $A \in \mathrm{M}(n;\mathbb{K})$ *ist genau dann eine unitäre Matrix, wenn ihre Zeilen eine Orthonormalbasis* $\big(\mathrm{Z}_1(A), \ldots, \mathrm{Z}_n(A)\big)$ *des Standardraumes* $\mathbb{K}^n$ *bilden.*

(2′) $A \in \mathrm{M}(n;\mathbb{K})$ *ist genau dann eine unitäre Matrix, wenn ihre Spalten eine Orthonormalbasis* $\big({}^{\mathrm{t}}\mathrm{S}_1(A), \ldots, {}^{\mathrm{t}}\mathrm{S}_n(A)\big)$ *des Standardraumes* $\mathbb{K}^n$ *bilden.*

(3) *Ist* $\mathcal{B}$ *Orthonormalbasis eines unitären Raumes* V*, so ist die Übergangsmatrix* $U_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ *zur Basis* $\mathcal{B}'$ *genau dann unitär, wenn auch* $\mathcal{B}'$ *eine Orthonormalbasis ist.*

Beweis. Da zueinander inverse Matrizen kommutieren, folgt (1) aus der Vertauschbarkeit der komplexen Konjugation mit Matrizenmultiplikation bzw. Transposition. (2) ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \overline{A} \cdot {}^{\mathrm{t}}A = \mathrm{E}_n &\iff \forall i,j:\ \mathrm{Z}_i(\overline{A}) \cdot \mathrm{S}_j({}^{\mathrm{t}}A) = \delta_{ij} \\ &\iff \forall i,j:\ \mathrm{Z}_i(\overline{A}) \cdot {}^{\mathrm{t}}\mathrm{Z}_j(A) = \delta_{ij} \\ &\iff \forall i,j:\ <\mathrm{Z}_i(A), \mathrm{Z}_j(A)> = \delta_{ij}\,. \end{aligned}$$

Die Behauptung (2′) erhalten wir nach (2), da ${}^{\mathrm{t}}A$ ebenfalls unitär ist.
Zum Beweis von (3) wählen wir eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ und eine Basis $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{b}'_1, \ldots, \boldsymbol{b}'_n)$; mit $U = (u_{ij}) := U_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ wird die Übergangsmatrix bezeichnet.
Angenommen, $\mathcal{B}'$ ist eine Orthonormalbasis. Dann gilt $<\boldsymbol{b}'_k, \boldsymbol{b}'_l> = \delta_{kl}$, und aus $\boldsymbol{b}_i = \sum_k u_{ki}\boldsymbol{b}'_k$ folgt

$$\delta_{ij} = <\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j> = \sum_{k,l} \overline{u_{ki}} u_{lj} <\boldsymbol{b}'_k, \boldsymbol{b}'_l> = {}^{\mathrm{t}}\overline{\mathrm{S}_i(U)} \cdot \mathrm{S}_j(U)\,.$$

Daher ist die Matrix U nach (2′) unitär.
Umgekehrt sei U unitär, so ist $U^{-1} = {}^{\mathrm{t}}\overline{U}$ ebenfalls unitär. Die entsprechende Rechnung ergibt $<\boldsymbol{b}'_i, \boldsymbol{b}'_j> = {}^{\mathrm{t}}\overline{\mathrm{S}_i(U^{-1})} \cdot \mathrm{S}_j(U^{-1}) = \delta_{ij}$. ❑

Satz 6/3/3 lässt sich nun folgendermaßen formulieren:

Korollar. *Ist* $A \in \mathrm{M}(n;\mathbb{K})$ *hermitesch, so existiert eine unitäre Matrix* $U \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$*, für die* ${}^{\mathrm{t}}\overline{U} \cdot A \cdot U$ *eine reelle Diagonalmatrix ist.* 6/3/6

Beweis. Zu A gehört ein selbstadjungierter Endomorphismus des Standardraumes $\mathbb{K}^n$ mit $\mathrm{M}(\varphi) = A$. Die Behauptung ergibt sich nach 6/3/5 (3) und der Formel für den Basiswechsel. ❑

Beispiel. Für die folgende symmetrische Matrix A soll eine Orthonormalbasis des euklidischen Standardvektorraumes $\mathbb{R}^3$ gefunden werden, die aus Eigenvektoren besteht,

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -13 & -2 & -4 \\ -2 & -10 & -2 \\ -4 & -2 & -13 \end{pmatrix}.$$

Zunächst bestimmen wir die Eigenwerte von A; wir erhalten sie als Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\chi_A = \det(X \cdot \mathrm{E}_3 - A) = (X+2)\cdot(X+1)^2 .$$

Zum Eigenwert $\lambda_1 = -2$ ergibt sich leicht ein Eigenvektor $(-2,-1,-2)$ als Basis des Eigenraumes. Der Eigenraum zu $\lambda_2 = -1$ ist dagegen zweidimensional: Wir bestimmen eine Basis, indem wir das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Durch Multiplikation mit dem Faktor 9 wurden in der charakteristischen Gleichung Brüche vermieden.

lösen. Mit dem gaußschen Algorithmus (oder „auf den ersten Blick“) ergibt sich $\mathcal{B}' = \big((-1,2,0),(-1,0,1)\big)$ als Basis der Lösungsmenge. Nach dem Orthogonalisierungsverfahren entsteht daraus

$$\mathcal{B}'_{\mathrm{orth}} = \big((-1,2,0),(-4,-2,5)\big)\text{, d.h.}$$
$$\mathcal{B} = \big((-2,-1,-2),(-1,2,0),(-4,-2,5)\big)$$

ist eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^3$, die aus Eigenvektoren der Matrix B besteht. Es ergibt sich eine Orthonormalbasis

$$\Big(\frac{1}{3}(-2,-1,-2), \frac{\sqrt{5}}{5}(-1,2,0), \frac{\sqrt{5}}{15}(-4,-2,5)\Big) .$$

Anmerkungen.

(1) Die Rechnung lässt sich hier noch vereinfachen, wenn anstelle der schon wiederholt verwendeten Standardmethode zur Bestimmung des Eigenraumes V_{λ_2} das orthogonale Komplement zum Eigenraum $V_{\lambda_1} = V_{\lambda_2}^{\perp}$ gewählt wird.

Überlegen Sie, wieso das bei einem doppelten Eigenwert möglich ist.

(2) Da ein mehrfacher Eigenwert existiert, besitzt die Aufgabe unendlich viele Lösungen. Manchmal sind mit etwas Glück und rechnerischem Geschick sogar noch „bessere“ zu finden, wie im vorliegenden Fall die Basis

$$\Big(\frac{1}{3}\cdot(-2,-1,-2), \frac{1}{3}\cdot(2,-2,-1), \frac{1}{3}\cdot(-1,-2,2)\Big),$$

auf die wir bei systematischem Vorgehen mit dem gaußschen Algorithmus nicht gekommen sind.

Eine elegantere Form erhalten die im Lemma 6/3/5 untersuchten Eigenschaften in der Sprache der linearen Abbildungen. Bezüglich einer Orthonormalbasis beschreiben unitäre Matrizen die Endomorphismen des folgenden Typs. **6/3/7**

Satz – Definition. (*unitärer Automorphismus*)

Ein Endomorphismus φ des unitären Vektorraumes V heißt *unitär* (im euklidischen Fall vorzugsweise *orthogonal*), falls er eine der folgenden, äquivalenten Eigenschaften besitzt. Er ist dann insbesondere ein Automorphismus.

Orthogonale Endomorphismen erhalten nach (1) Längen und Winkel; sie sind nach (2) stets bijektiv.

(1) *Für alle* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ *ist* $<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}> = <\varphi(\boldsymbol{x}),\varphi(\boldsymbol{y})>$.

(2) $\varphi^\star \cdot \varphi = \mathrm{id}_V$.

(3) *Es existiert eine Orthonormalbasis* $\mathcal{B}$ *von* V*, für die* $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ *eine unitäre Matrix ist.*

(4) *Für jede Orthonormalbasis* $\mathcal{B}$ *von* V *ist* $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ *eine unitäre Matrix.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2), denn für beliebige Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ folgt nach Definition des adjungierten Operators

$$<(\varphi^\star \cdot \varphi)(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}> = <\varphi(\boldsymbol{x}), \varphi(\boldsymbol{y})> = <\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}> = <\mathrm{id}_V(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}> .$$

Sollte Ihnen der Begriff *unitär* noch fremd vorkommen, so führen Sie die Rechnung (3) $\Rightarrow$ (1) aus!

Das Skalarprodukt ist nichtausgeartet, daher $(\varphi^\star \cdot \varphi)(\boldsymbol{x}) = \mathrm{id}_V(\boldsymbol{x})$.

Die Implikationen (2) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (3) sind offensichtlich, und (3) $\Rightarrow$ (1) ist eine leichte Rechnung mit Koordinaten bezüglich $\mathcal{B}$. ❑

Für Determinante bzw. Eigenwerte eines unitären Automorphismus kommen nur sehr spezielle Zahlen infrage.

Bemerkung. $\varphi : V \to V$ sei unitär. 6/3/8

(1) $\det(\varphi^\star \cdot \varphi) = 1$, woraus sich wegen $\det(\varphi^\star) = \overline{\det(\varphi)}$ der Absolutbetrag $|\det(\varphi)| = \overline{\det(\varphi)} \cdot \det(\varphi) = 1$ ergibt.
Insbesondere ist im euklidischen Fall die Determinante eines orthogonalen Automorphismus eine der Zahlen ± 1. Erhält φ die Orientierung, so kommt nur noch der positive Wert $\det(\varphi) = 1$ infrage.

$\det(\varphi^\star) = \overline{\det(\varphi)}$ ergibt sich z.B. aus den Matrixdarstellungen.

(2) Ein Eigenwert λ von φ hat den Betrag 1, denn ist $\boldsymbol{x}$ ein Eigenvektor, so folgt

$$<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}> = <\varphi(\boldsymbol{x}), \varphi(\boldsymbol{x})> = <\lambda\boldsymbol{x}, \lambda\boldsymbol{x}> = \overline{\lambda} \cdot \lambda <\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}>,$$

wegen $<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}> \neq \boldsymbol{0}$ daher $\overline{\lambda} \cdot \lambda = 1$.

Schwerpunkte zum gewählten Stoff

- Der Adjungierte eines Endomorphismus unitärer Vektorräume [6/3/1]
- Elementare Eigenschaften des adjungierten Endomorphismus [6/3/2]
- Spektralsatz für selbstadjungierte Endomorphismen und praktische Ausführung der Spektralzerlegung [6/3/3]
- Unitäre Automorphismen [6/3/4 – 6/3/8]

Sachverzeichnis

Symbole

$\varphi^\star$, adjungierter Endomorphismus [6/3/1], 1
$\mathrm{O}(n)$, orthogonale Gruppe [6/3/4], 2
$\mathrm{SO}(n)$, spezielle orthogonale Gruppe [6/3/4], 3
$\mathrm{SU}(n)$, spezielle unitäre Gruppe [6/3/4], 3
$\mathrm{U}(n)$, unitäre Gruppe [6/3/4], 2

A

adjungierter Endomorphismus [6/3/1], 1

O

orthogonale
– Gruppe [6/3/4], 2
– Matrix [6/3/4], 2
orthogonaler
– Automorphismus [6/3/7], 4

S

selbstadjungierter Operator [6/3/1], 1
Spektralsatz
– für selbstadjungierte Operatoren [6/3/3], 2
Spektralzerlegung
– eines selbstadjungierten Endomorphismus [6/3/3], 2
spezielle orthogonale Gruppe [6/3/4], 3
spezielle unitäre Gruppe [6/3/4], 3

U

unitäre
– Gruppe [6/3/4], 2
– Matrix [6/3/4], 2
unitärer
– Automorphismus [6/3/7], 4