Der Spektralsatz für normale Operatoren

Die folgende Eigenschaft wird insbesondere von unitären und von selbstadjungierten Endomorphismen erfüllt.

Definition. (*normaler Operator*) 6/3/9

Ein Endomorphismus φ des unitären Vektorraumes V heißt *normal*, falls er die Bedingung $\varphi^\star \cdot \varphi = \varphi \cdot \varphi^\star$ erfüllt.

Damit beginnt das Studium einer größeren Klasse von Endomorphismen. Methode: Spektralzerlegung.

Wir beginnen die Untersuchung mit dem Fall des Grundkörpers der komplexen Zahlen.

Lemma. (*Cartan-Zerlegung*) 6/3/10

Für $\varphi \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V)$ *setzen wir*

$$\varphi_1 := \frac{1}{2}(\varphi + \varphi^\star)\,, \quad \varphi_2 := \frac{1}{2i}(\varphi - \varphi^\star)\,.$$

(1) $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, *und die Endomorphismen* φ_1, φ_2 *sind selbstadjungiert;* sie werden als *selbstadjungierte Komponenten* von φ bezeichnet.

(2) φ *ist genau dann normal, wenn* φ_1 *und* φ_2 *kommutieren, d.h. wenn* $\varphi_1 \cdot \varphi_2 = \varphi_2 \cdot \varphi_1$ *ist.*

Überlegen Sie, weshalb φ_1, φ_2 durch φ eindeutig bestimmt sind.

Beweis. Einsetzen ergibt $\varphi_1 + i\varphi_2 = \varphi$. Wegen

$$\varphi_1^\star = \big(\frac{1}{2}(\varphi + \varphi^\star)\big)^\star = \frac{1}{2}\big(\varphi^\star + (\varphi^\star)^\star\big) = \frac{1}{2}(\varphi^\star + \varphi) = \varphi_1$$

ist φ_1 selbstadjungiert; daraus und aus einer entsprechenden Rechnung für φ_2 folgt (1).

Beachten Sie dabei die Eigenschaften aus 6/3/2.

(2) erhalten wir folgendermaßen: Es ist $\varphi^\star = \varphi_1 - i\varphi_2$. Multiplikation mit φ ergibt nach (1)

$$\varphi \cdot \varphi^\star = (\varphi_1 + i\varphi_2) \cdot (\varphi_1 - i\varphi_2) = \varphi_1^2 - i\varphi_1 \cdot \varphi_2 + i\varphi_2 \cdot \varphi_1 + \varphi_2^2\,,$$

und ebenso folgt

$$\varphi^\star \cdot \varphi = (\varphi_1 - i\varphi_2) \cdot (\varphi_1 + i\varphi_2) = \varphi_1^2 + i\varphi_1 \cdot \varphi_2 - i\varphi_2 \cdot \varphi_1 + \varphi_2^2\,.$$

Die Bedingung $\varphi \cdot \varphi^\star = \varphi^\star \cdot \varphi$ ist daher äquivalent zu $-i\varphi_1 \cdot \varphi_2 + i\varphi_2 \cdot \varphi_1 = i\varphi_1 \cdot \varphi_2 - i\varphi_2 \cdot \varphi_1$, gleichbedeutend zu $\varphi_1 \cdot \varphi_2 = \varphi_2 \cdot \varphi_1$. ❑

Wir bemerken, dass uns die Cartan-Zerlegung in einem Fall bereits zuvor bekannt war: Endomorphismen eindimensionaler komplexer Vektorräume sind durch Multiplikation mit einer Konstanten $\alpha \in \mathbb{C}$ gegeben. Die Zerlegung aus dem Lemma entsteht dann durch Zerlegung der Zahl α in Real- und Imaginärteil.

Satz. (*Spektralsatz für normale Operatoren*) 6/3/11

Ist φ *ein normaler Endomorphismus des komplexen unitären Vektorraumes* V, *so existiert eine Orthonormalbasis* $\mathcal{B}$ *von* V, *für die* $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ *eine Diagonalmatrix ist.*

Im Gegensatz zum selbstadjungierten Fall können hier Eigenwerte $\notin \mathbb{R}$ auftreten.

Beweis. Nach dem Lemma genügt es zu beweisen, dass die selbstadjungierten Komponenten φ_1, φ_2 von φ bezüglich einer geeigneten Orthonormalbasis beide eine Diagonalmatrix besitzen.

Da $\varphi_1 \cdot \varphi_2 = \varphi_2 \cdot \varphi_1$ ist, folgt dies ebenso wie im Satz 5/2/9 über simultane Diagonalisierbarkeit, und zwar mit paarweise orthogonalen Summanden. ❑

Das ist der Trick, mit dem wir uns auf den Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren beschränken können.

Korollar. *Ein Endomorphismus φ des unitären $\mathbb{K}$-Vektorraumes V ist dann und nur dann normal, wenn ein Polynom $f \in \mathbb{K}[X]$ existiert, für das $\varphi^\star = f(\varphi)$ ist.* 6/3/12

Beweis. Die Implikation ($\Leftarrow$) ergibt sich nach vertrautem Muster:
Wegen $\varphi^\star = f(\varphi)$ liegt $\varphi^\star$ im kommutativen Unterring $\mathbb{K}[\varphi]$ von $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$, insbesondere gilt also $\varphi \cdot \varphi^\star = \varphi^\star \cdot \varphi$.
Den Beweis von ($\Rightarrow$) beginnen wir mit dem Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
Nach dem Satz besitzt V eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren für φ. $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ bezeichne die Matrix von φ bezüglich dieser Basis. Gesucht wird ein Polynom $f \in \mathbb{C}[X]$, für das ${}^{\mathrm{t}}\overline{A} = f(A)$ ist.
Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte, so existiert genau ein Polynom $f \in \mathbb{C}[X]$ vom Grad $\leq k-1$, für das $f(\lambda_i) = \overline{\lambda_i}$ ist, $i = 1, \ldots, k$ (diese Bedingung entspricht einem eindeutig lösbaren linearen Gleichungssystem für die Koeffizienten von f). Damit folgt

Die Determinante der Koeffizientenmatrix dieses linearen Gleichungssystems ist die vandermondesche von $\lambda_1, \ldots \lambda_k$, daher $\neq 0$.

$$\begin{aligned} f(A) &= f\big(\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\big) \\ &= \mathrm{diag}\big(f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)\big) = \mathrm{diag}(\overline{\lambda_1}, \ldots, \overline{\lambda_n}) = {}^{\mathrm{t}}\overline{A}. \end{aligned}$$

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ müssen die Nullstellen $\lambda_i \in \mathbb{C}$ des charakteristischen Polynoms reell sein oder als Paare konjugiert komplexer Zahlen auftreten. Wieder sei k die Anzahl der paarweise verschiedenen λ_i und $f \in \mathbb{C}[X]$ das Polynom vom Grad $\leq k-1$, das beim Einsetzen jede Nullstelle in die entsprechende konjugiert komplexe Zahl überführt. Bezeichnet $\overline{f}$ das aus f durch Konjugation der Koeffizienten gebildete Polynom, so besitzt $\overline{f}$ dieselbe Eigenschaft, da für $\lambda = \lambda_i$ offenbar $\lambda = \overline{f(\lambda)} = \overline{f}(\overline{\lambda})$ ist. Aus $\deg(f) = \deg(\overline{f})$ und der Eindeutigkeit von f folgt daher $f = \overline{f}$, d.h. $f \in \mathbb{R}[X]$. Für den durch Skalarerweiterung entstandenen Homomorphismus $\varphi_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$ erhalten wir nun $f(\varphi_{\mathbb{C}}) = \varphi_{\mathbb{C}}^\star$ und damit auch $f(\varphi) = \varphi^\star$. ❑

Aus dem zuvor bewiesenen Spektralsatz wird nun hergeleitet, dass für einen normalen Operator φ eines euklidischen Vektorraumes eine Orthonormalbasis existiert, bezüglich der φ eine Blockdiagonalmatrix mit Blöcken des Formats ≤ 2 besitzt. Anders als für den Grundkörper $\mathbb{C}$ dürfen wir Diagonalisierbarkeit im Allgemeinen nicht erwarten.

Im reellen Fall gestaltet sich die Untersuchung normaler Operatoren schwieriger als über den komplexen Zahlen.

Satz. *Ist φ ein normaler Endomorphismus des euklidischen Vektorraumes V, so existieren $a_i, b_j, c_j \in \mathbb{R}$ mit $c_j > 0$ sowie eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V, für die* 6/3/13

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} a_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \mathbf{0} & \\ & & a_s & & & & & \\ & & & b_1 & -c_1 & & & \\ & & & c_1 & b_1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & \mathbf{0} & & & & & b_t & -c_t \\ & & & & & & c_t & b_t \end{pmatrix}$$

ist. Dabei sind die längs der Hauptdiagonale angeordneten Zahlen a_i und die Blöcke $\begin{pmatrix} b_j & -c_j \\ c_j & b_j \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2; \mathbb{R})$ bis auf Reihenfolge eindeutig bestimmt; sie sind durch die reellen Nullstellen a_i sowie die Real- und Imaginärteile (b_j, c_j) der übrigen komplexen Nullstellen von χ_φ gegeben.

Beweis. Die Eindeutigkeit ist leicht zu sehen, indem das charakteristische Polynom der im Satz angegebenen Matrix berechnet wird:

$(X-a_1)\cdot\ldots\cdot(X-a_s)\cdot(X^2-2b_1X+b_1^2+c_1^2)\cdot\ldots\cdot(X^2-2b_tX+b_t^2+c_t^2)$
ist die Zerlegung von χ_φ in irreduzible Faktoren aus $\mathbb{R}[X]$. Die auftretenden quadratischen Polynome besitzen Paare $b_j \pm ic_j$ konjugiert komplexer Nullstellen, und wegen $c_j > 0$ können b_j und c_j aus den Koeffizienten von $X^2-2b_jX+(b_j^2+c_j^2)$ abgelesen werden.

Zum Beweis der Existenz der Basis $\mathcal{B}$ g.z.z.:

$(*)$ *V ist orthogonale Summe φ-invarianter Unterräume V_i deren Dimensionen ≤ 2 sind. Die V_i können so gewählt werden, dass die Einschränkungen $\varphi|_{V_i}$ auf die zweidimensionalen unter diesen Unterräumen keine Eigenwerte besitzen, und bezüglich einer geeigneten Orthonormalbasis $\mathcal{B}_i$ von V_i gilt für letztere*

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_i}(\varphi|_{V_i}) = \begin{pmatrix} b_i & -c_i \\ c_i & b_i \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2;\mathbb{R}) \quad \textit{mit } c_i > 0.$$

O.B.d.A. kann vorausgesetzt werden, dass $V = \mathbb{R}^n$ der euklidische Standardraum ist sowie $\mathrm{M}(\varphi) = A$ eine Matrix mit der Eigenschaft ${}^{\mathrm{t}}A\cdot A = A\cdot{}^{\mathrm{t}}A$. $\psi := \varphi_{\mathbb{C}}$ bezeichne die Skalarerweiterung auf den unitären Standardraum $\mathbb{C}^n$. Dann ist ψ ein normaler Endomorphismus, dessen Einschränkung auf die Teilmenge $\mathbb{R}^n$ die Abbildung φ induziert.
$a_1,\ldots,a_s \in \mathbb{R}$ und $\lambda_1,\ldots,\lambda_t,\overline{\lambda}_1,\ldots,\overline{\lambda}_t \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ bezeichnen nun die mit ihren algebraischen Multiplizitäten aufgeführten Eigenwerte von ψ. Wie der zuvor bewiesene Spektralsatz für normale Operatoren zeigt, besitzt ψ bezüglich einer geeigneten Orthonormalbasis des $\mathbb{C}^n$ die Matrix
$\mathrm{diag}(a_1,\ldots,a_s,\lambda_1,\overline{\lambda}_1,\ldots\lambda_t,\overline{\lambda}_t)$. Zum Beweis von $(*)$ werden wir aus dieser Basis eine solche konstruieren, deren Vektoren in $\mathbb{R}^n$ liegen.
Zunächst wählen wir einen der reellen Eigenwerte $a = a_i$ und bezeichnen mit $W_{\psi,a} \subseteq \mathbb{C}^n$ den zugehörigen Eigenraum. Da sich algebraische und geometrische Multiplizität des Eigenwertes a von A bei Körpererweiterung nicht ändern, ist $W_{\psi,a}$ durch eine reelle Orthonormalbasis des Eigenraumes $V_{\varphi,a}$ erzeugt.
Ähnlich gehen wir für die nicht reellen Eigenwerte von ψ vor: Es sei $\lambda = \lambda_j$ für einen der Indizes $j \in \{1,\ldots,t\}$. Wir suchen eine Basis von $W_{\psi,\lambda} \uplus W_{\psi,\overline{\lambda}}$, deren Vektoren in $\mathbb{R}^n$ liegen.
$\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ sei ein Eigenvektor zu λ. Dann ist der komplexe Unterraum $W' := \mathbb{C}\boldsymbol{v} + \mathbb{C}\overline{\boldsymbol{v}} \subseteq \mathbb{C}^n$ zweidimensional, denn er wird durch die Eigenvektoren $\boldsymbol{v}$, $\overline{\boldsymbol{v}}$ zu den verschiedenen Eigenwerten λ, $\overline{\lambda}$ von ψ erzeugt. Wir setzen

$$\boldsymbol{x} := \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}+\overline{\boldsymbol{v}}) \quad \boldsymbol{y} := \frac{1}{2i}(\boldsymbol{v}-\overline{\boldsymbol{v}})$$

und erhalten eine $\mathbb{C}$-Basis $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ von W' aus $W' \cap \mathbb{R}^n$. Offensichtlich ist

$$0 = <\boldsymbol{v},\overline{\boldsymbol{v}}> = <\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}-i\boldsymbol{y}> = <\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}> - <\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}> -2i<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>,$$

daher $<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}> = 0$ und $\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{y}\|$. Nach Multiplikation des Ausgangsvektors $\boldsymbol{v}$ mit einer geeigneten reellen Konstanten gilt sogar $\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{y}\| = 1$.

Die Rechnung funktioniert, da $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$.

Ist λ o.B.d.A. derjenige der beiden Eigenwerte λ, $\overline{\lambda}$ mit $\lambda = b-ic$ ($b,c \in \mathbb{R}$, $c > 0$), so folgt aus $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x}+i\boldsymbol{y}$, $\overline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{x}-i\boldsymbol{y}$ und $\psi(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{v}$, $\psi(\overline{\boldsymbol{v}}) = \overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{v}}$ durch leichte Rechnung

$$\mathrm{M}_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}(\psi|_{W'}) = \begin{pmatrix} b & -c \\ c & b \end{pmatrix}.$$

Wenden wir dieses Verfahrens auf alle Vektoren einer Orthonormalbasis von $W_{\psi,\lambda}$ an, so ergibt sich eine Zerlegung des Unterraumes $W_{\psi,\lambda} \uplus W_{\psi,\overline{\lambda}}$ in eine orthogonale Summe zweidimensionaler ψ-invarianter Unterräume.

Hier sollten Sie sich an die Definition der zugeordneten Matrix erinnern: zu bestimmen sind die Koordinaten von $\psi(\boldsymbol{x})$, $\psi(\boldsymbol{y})$ bezüglich $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$.

Durch Zusammenfügen der gefundenen Orthonormalbasen aus reellen Vektoren entsteht eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V mit der behaupteten Eigenschaft $(*)$. ❑

Beispiel. Die Matrix

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ 4 & 14 & -7 \\ -8 & -1 & 14 \end{pmatrix}$$

definiert einen normalen Operator auf dem unitären Standardraum $\mathbb{K}^3$, denn ${}^t\overline{A} \cdot A = A \cdot {}^t\overline{A}$. Für das charakteristische Polynom ergibt sich

$$\chi_A = X^3 - 5X^2 + 9X - 5 = (X-1)\cdot(X^2 - 4X + 5)\,,$$

wobei der zweite Faktor die konjugiert komplexen Nullstellen $2 \pm i$ besitzt. Bezüglich geeigneter Orthonormalbasen erhalten wir daher die Normalformen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 0 \\ 0 & 0 & 2-i \end{pmatrix} \text{ über } \mathbb{C} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ über } \mathbb{R}. \qquad \square$$

Ein orthogonaler Endomorphismus ist insbesondere normal. Seine Determinante kann nach 6/3/8 nur eine der Zahlen ± 1 sein. Diese Eigenschaft bleibt erhalten, wenn wir uns auf die invarianten Unterräume beschränken, die im vorigen Satz 6/3/13 auftreten. Die 2×2-Blöcke sind dann von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \alpha \in (0,\pi),$$

und als reelle Eigenwerte kommen nur die Zahlen $a_i = \pm 1$ infrage. Daraus ergibt sich der folgende

Satz. (*Klassifikation der orthogonalen Abbildungen*)6/3/14Klassifikation der orthogonalen Abbildungen 6/3/14

Ist φ ein orthogonaler Endomorphismus, so besitzt dieser bezüglich einer geeigneten Orthonormalbasis die Blockdiagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \mathbf{0} & \\ & & \pm 1 & & & & & \\ & & & \cos(\alpha_1) & -\sin(\alpha_1) & & & \\ & & & \sin(\alpha_1) & \cos(\alpha_1) & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & \mathbf{0} & & & & & \cos(\alpha_t) & -\sin(\alpha_t) \\ & & & & & & \sin(\alpha_t) & \cos(\alpha_t) \end{pmatrix}$$

mit $\alpha_j \in (0,\pi)$. Die komplexen Nullstellen des charakteristischen Polynoms χ_φ sind die Diagonaleinträge ± 1 sowie (den 2×2-Blöcken entsprechend) die konjugiert komplexen Zahlen $\cos(\alpha_j) \mp i\sin(\alpha_j)$ mit ihren algebraischen Multiplizitäten.

Bemerkung. Als Verfahren zur Bestimmung einer Matrix in der obigen Gestalt und einer zugehörigen Orthonormalbasis bietet sich prinzipiell der im Beweis ausgeführte (Um-)Weg über die komplexen Zahlen an. 6/3/15
In kleinen Dimensionen vereinfacht sich die Situation beträchtlich.

(1) Besitzt der orthogonale Automorphismus $\varphi : V \to V$ einer euklidischen Ebene keinen Eigenwert, so hat er bezüglich jeder Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ die Matrix

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

mit einer geeigneten reellen Zahl $\alpha \in (0,\pi)$ oder $\alpha \in (\pi, 2\pi)$, wobei der zweite Fall durch Permutation der Basisvektoren ausgeschlossen werden kann. Die so gefundene Zahl $\alpha \in (0,\pi)$ ergibt sich für beliebige $\boldsymbol{x} \in$

$V \setminus \{\mathbf{0}\}$ als Winkel zwischen den Vektoren $\boldsymbol{x}$ und $\varphi(\boldsymbol{x})$, und φ heißt eine *Drehung* um den so eindeutig bestimmten *Drehwinkel* α.
Anderenfalls ist φ diagonalisierbar, und da als Eigenwerte nur die Zahlen ± 1 infrage kommen, ergibt sich bezüglich einer geeigneten Basis $\mathcal{B}$ aus Eigenvektoren

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \mathrm{E}_2\,, \quad \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = -\mathrm{E}_2 \quad \text{oder} \quad \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Im letzten Fall heißt φ eine *Spiegelung* an dem eindimensionalen Unterraum U, der durch den ersten Basisvektor erzeugt wird. U ist dabei als Eigenraum zum Eigenwert 1 eindeutig bestimmt.

(2) Nun sei $\varphi : V \to V$ ein orthogonaler Automorphismus eines dreidimensionalen euklidischen Raumes. Das charakteristische Polynom $\chi_\varphi \in \mathbb{R}[X]$ hat den Grad 3, besitzt also wenigstens eine reelle Nullstelle. Daher muss φ bezüglich einer geeigneten Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ eine Matrix der Gestalt $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \mathrm{diag}(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ oder der Gestalt

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

mit $\alpha \in (0, \pi)$ besitzen. Im zweiten Fall tritt genau ein Eigenwert λ der algebraischen und geometrischen Multiplizität 1 auf. Für $\lambda = 1$ heißt dann φ eine *Drehung*, ist $\lambda = -1$, so sprechen wir von einer *Drehspiegelung*.

Normalformen der Matrizen orthogonaler Abbildungen, Dimension 2				
komplexe Eigenwerte		Matrix	det	Name
1	1	E_2	1	Identität
-1	-1	$-\mathrm{E}_2$		Punktspiegelung
$\cos(\alpha) \pm i \sin(\alpha)$, $\alpha \in (0, \pi)$		$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$		Drehung
1	-1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	-1	Geradenspiegelung

Die in der Tabelle aufgeführte Punktspiegelung kann ebenso als Drehung mit dem Drehwinkel π bezeichnet werden.
Die ersten der drei obigen Typen orthogonaler Abbildungen besitzen eine positive Determinante, sind also orientierungserhaltend. Die nachfolgende Tabelle für dreidimensionale orthogonale Abbildungen zeigt eine entsprechende Einteilung.

Normalformen der Matrizen orthogonaler Abbildungen, Dimension 3					
komplexe Eigenwerte			Matrix	det	Name
1	1	1	E_3	1	Identität
1	$\cos(\alpha) \pm i \sin(\alpha)$ $\alpha \in (0, \pi)$		$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$		Drehung
1	-1	-1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$		Geradenspiegelung
-1	$\cos(\alpha) \pm i \sin(\alpha)$ $\alpha \in (0, \pi)$		$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$	-1	Drehspiegelung
-1	-1	-1	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$		Punktspiegelung
-1	1	1	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$		Ebenenspiegelung

Ähnlich wie schon zuvor im Fall der Dimension 2 heißen Geradenspiegelungen auch Drehungen um den Winkel π, entsprechend Punktspiegelungen auch Drehspiegelungen um den Winkel π.