6.2 Euklidische und unitäre Räume

Die Parallelprojektion eines euklidischen affinen Raumes X auf einen (nicht leeren) affinen Unterraum Y längs des orthogonalen Komplements von $\mathrm{T}(Y)$ heißt *orthogonale Projektion* auf Y; es ergibt sich der Begriff des *Abstands von einem Unterraum.* Präzisiert wird dies durch nachfolgendes Resultat, das sich später als Approximationssatz erweist.

6/2/17

Vgl. Satz 6/1/32; hier ist längs $\mathrm{T}(Y)^{\perp}$ zu projizieren.

Satz. *Ist $Y \neq \emptyset$ ein Unterraum des euklidischen affinen Raumes X und $P \in X$, so existiert genau ein Punkt $F \in Y$ mit*

$$\mathrm{d}(P,F) = \min\{\mathrm{d}(P,Q) \mid Q \in Y\}.$$

(1) *F ist das Bild von P bei der orthogonalen Projektion von X auf den Unterraum Y.*

(2) *F ist durch die Bedingungen $F \in Y$ und $\overrightarrow{PF} \perp \mathrm{T}(Y)$ eindeutig bestimmt.*

Beweis. Es sei $U := \mathrm{T}(Y)$. Wir wählen einen Punkt $O \in Y$ und setzen $\boldsymbol{x} := \overrightarrow{OP}$. Mit der Projektion $\pi_U : \mathrm{T}(X) \to U$ längs $U^{\perp}$ erhalten wir das Bild $F := P - \big(\boldsymbol{x} - \pi_U(\boldsymbol{x})\big) = O + \pi_U(\boldsymbol{x})$ von P bei der zugehörigen Parallelprojektion auf Y (vgl. 6/1/32). Nun g.z.z.

($*$) F ist der einzige Punkt $Q \in Y$, für den $\mathrm{d}(P,Q)$ minimal ist.

Für einen beliebigen Punkt $Q \in Y$ setzen wir $\boldsymbol{z} := \overrightarrow{OQ}$. Aus $\big(\boldsymbol{x} - \pi_U(\boldsymbol{x})\big) \in U^{\perp}$ und $\boldsymbol{z} \in U$ folgt $\big(\boldsymbol{x} - \pi_U(\boldsymbol{x})\big) \perp \big(\pi_U(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{z}\big)$. Der Satz des Pythagoras ergibt

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(P,Q)^2 &= \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}\|^2 = \|\boldsymbol{x} - \pi_U(\boldsymbol{x})\|^2 + \|\pi_U(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{z}\|^2 \\ &> \|\boldsymbol{x} - \pi_U(\boldsymbol{x})\|^2 = \mathrm{d}(P,F)^2\end{aligned}$$

sofern $\boldsymbol{z} \neq \pi_U(\boldsymbol{x})$, d.h. $Q \neq F$ ist. Damit folgt ($*$). ❑

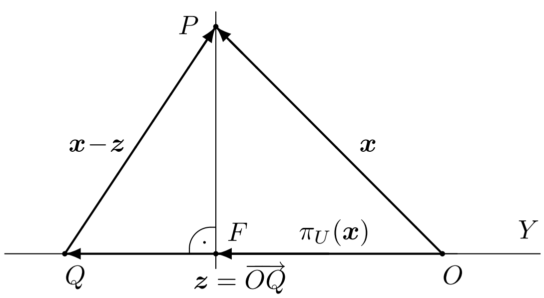

Abb. 6/2/17
Der Abstand $\mathrm{d}(P,Y)$ des Punktes P von dem Unterraum Y ist $\|\overrightarrow{PF}\| = \|\boldsymbol{x} - \pi_U(\boldsymbol{x})\|$.

Der im Satz gefundene Punkt F heißt *Fußpunkt des Lots* von P auf Y; im Fall $P \neq F$ (d.h. $P \notin Y$) wird die Verbindungsgerade $P \vee F$ als *Lot* von P auf Y bezeichnet. Es ist nahe liegend, die Zahl $\mathrm{d}(P,F)$ den *Abstand des Punktes P von Y* zu nennen. Dies ist ein Spezialfall der folgenden

Definition. (*Abstand von Unterräumen*) 6/2/18

Sind Y_1 und Y_2 nichtleere Unterräume des euklidischen affinen Raumes X, dann heißt die Zahl

$$\mathrm{d}(Y_1,Y_2) := \inf\{\mathrm{d}(P_1,P_2) \mid P_1 \in Y_1, P_2 \in Y_2\}$$

Abstand der Unterräume Y_1, Y_2.

Zur Erinnerung: Das Infimum $\inf(M)$ einer nach unten beschränkten nichtleeren Menge reeller Zahlen ist deren größte untere Schranke.

Für $\dim(Y_1) = 0$ zeigt der Satz 6/2/17, dass dieses Infimum sogar ein Minimum ist. Wie wir sehen werden, trifft das auch für beliebige (nicht leere) affine Unterräume zu.

... das gilt natürlich nicht mehr, wenn anstelle affiner Unterräume beliebige Teilmengen gewählt werden.

Lemma. *Sind $P_1 \in Y_1$ und $P_2 \in Y_2$ Punkte der Unterräume Y_1, Y_2 von* 6/2/19

X *und ist* $\mathrm{T}(P_1 \vee P_2) \perp \mathrm{T}(Y_i)$ $(i = 1, 2)$*, so gilt* $\mathrm{d}(Y_1, Y_2) = \mathrm{d}(P_1, P_2)$.

Beweis. Für beliebige Punkte $P_i' \in Y_i$ erhalten wir nach dem Satz des Pythagoras

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{P_1'P_2'}\|^2 &= \|\overrightarrow{P_1'P_1} + \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_2'}\|^2 \\ &= \|\overrightarrow{P_1P_2}\|^2 + \|\overrightarrow{P_1'P_1} + \overrightarrow{P_2P_2'}\|^2 \geq \|\overrightarrow{P_1P_2}\|^2.\end{aligned}$$ ❑

Satz. *Für nichtleere Unterräume* Y_1 *und* Y_2 *des euklidischen affinen Raumes* X *ist* 6/2/20

$$\mathrm{d}(Y_1, Y_2) = \mathrm{d}(P, Y_2 + \mathrm{T}(Y_1)),$$

wobei $P \in Y_1$ *ein beliebiger Punkt ist und* $Y_2 + \mathrm{T}(Y_1)$ *der affine Unterraum*

$$Y_2 + \mathrm{T}(Y_1) := \{Q + \boldsymbol{x} \mid Q \in Y_2, \, \boldsymbol{x} \in \mathrm{T}(Y_1)\}.$$

Beweis. Wir setzen $\tilde{Y}_2 := Y_2 + \mathrm{T}(Y_1)$. Die Behauptung ergibt sich aus den folgenden Teilschritten.

(1) $\mathrm{T}(Y_1) \subseteq \mathrm{T}(\tilde{Y}_2)$, d.h. die Unterräume Y_1 und $\tilde{Y}_2$ sind parallel.

(2) $\mathrm{d}(Y_1, Y_2) = \mathrm{d}(Y_1, \tilde{Y}_2)$.

(3) $\mathrm{d}(P, \tilde{Y}_2)$ ist konstant für $P \in Y_1$.

Die erste Aussage ist trivial.
Unter (2) gilt wegen $Y_2 \subseteq \tilde{Y}_2$ offensichtlich $\mathrm{d}(Y_1, Y_2) \geq \mathrm{d}(Y_1, \tilde{Y}_2)$; wir beweisen die Abschätzung „ $\leq$ “. Dazu werden beliebige Punkte $P_1 \in Y_1$, $\tilde{P}_2 \in \tilde{Y}_2$ gewählt; es genügt nun zu zeigen, dass $P_1' \in Y_1$, $P_2' \in Y_2$ existieren, für die

$$(*) \qquad \mathrm{d}(P_1, \tilde{P}_2) = \mathrm{d}(P_1', P_2')$$

ist. Zunächst gibt es einen Vektor $\boldsymbol{u}_1 \in \mathrm{T}(Y_1)$ mit $P_2' := \tilde{P}_2 + \boldsymbol{u}_1 \in Y_2$; wir wählen dann $P_1' := P_1 + \boldsymbol{u}_1 \in Y_1$ und erhalten $(*)$.
Die letzte Eigenschaft folgt aus der Parallelität der Unterräume Y_1, $\tilde{Y}_2$ mit $\mathrm{T}(Y_1) \subseteq \mathrm{T}(\tilde{Y}_2)$; sie verbleibt als Übungsaufgabe. ❑

Kommutativität der Vektoraddition zeigt Gleichheit gegenüberliegender Seiten eines Parallelogramms.

Die Bestimmung des Abstands zweier Unterräume wird durch den Satz 6/2/20 auf die Bestimmung des Abstands eines Punktes von einem geeigneten Unterraum reduziert. Das lässt sich rechnerisch auf besonders elegante Weise ausführen.

Es sei zunächst $H := P + U$ eine Hyperebene im euklidischen affinen Raum X, d.h. $U \subseteq \mathrm{T}(X)$ ist ein Untervektorraum der Dimension $\dim(X) - 1$. Mit $\pi_U : \mathrm{T}(X) \to \mathrm{T}(X)$ wird die orthogonale Projektion auf U bezeichnet. Wir fixieren einen Punkt $O \in X$; dann ergibt sich mit $\boldsymbol{v} := \overrightarrow{OP}$

Sie können das durch eine Skizze noch anschaulicher gestalten. Der Beweis des allgemeinen Satzes 6/2/22 kommt allerdings auch ohne die geometrische Intuition aus.

$$d := \mathrm{d}(O, H) = \|\boldsymbol{v} - \pi_U(\boldsymbol{v})\|, \quad \text{und}$$

$$F = O + \boldsymbol{v} - \pi_U(\boldsymbol{v})$$

ist der Fußpunkt des Lots von O auf H.
Für $O \notin H$ ist $\boldsymbol{w} := d^{-1} \cdot (\boldsymbol{v} - \pi_U(\boldsymbol{v}))$ ein normierter Vektor in Richtung des Lots, er heißt *Einheitsnormalenvektor* zur Hyperebene H und hängt nur bis auf das Vorzeichen von der Wahl des Punktes $O \in X \setminus H$ ab.

Es ist $\dim\left(\mathrm{T}(H)^{\perp}\right) = 1$.

$$\begin{aligned} d^2 &= \|\boldsymbol{v} - \pi_U(\boldsymbol{v})\|^2 = <\boldsymbol{v} - \pi_U(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v} - \pi_U(\boldsymbol{v})> \\ &= <\boldsymbol{v} - \pi_U(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v}> = d \cdot <\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}>, \end{aligned}$$

also $d = <\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}>$.
Nun sei $\boldsymbol{x} \in \mathrm{T}(X)$ ein Vektor. Wegen $\mathbb{R}\,\boldsymbol{w} \oplus U = \mathrm{T}(X)$ gilt

$$O + \boldsymbol{x} \in H \iff <\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}> = 0,$$

$$<\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}> = 0 \iff <\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}> = <\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}> \iff <\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}> = d.$$

Wir erhalten

$$O + \boldsymbol{x} \in H \iff <\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}> = d.$$

zur Erinnerung: Dualität zeigt, dass der Raum der Linearformen auf dem $(\dim(X) - 1)$-dimensionalen Unterraum H eindimensional ist.

Diese Gleichung für H ist (nach Wahl des Punktes $O \notin H$) eindeutig bestimmt; sie entsteht aus einer beliebigen Gleichung $< \tilde{\boldsymbol{w}}, \boldsymbol{x} >= \tilde{d}$ für H nach Multiplikation mit einer Konstanten, so dass der Koeffizientenvektor $\tilde{\boldsymbol{w}}$ normiert und die rechte Seite nicht negativ ist. Daraus ergibt sich die folgende

Bemerkung. (*Abstand und hessesche Normalform*) 6/2/21

Für einem gegebenen Punkt $O \in X$ sei

$$H = \{O + \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathrm{T}(X),\ <\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}>= d\}$$

eine Hyperebene, wobei $\boldsymbol{w} \in \mathrm{T}(X)$, $d \in \mathbb{R}$, $\|\boldsymbol{w}\| = 1$ und $d > 0$.
Dann gilt

$$\mathrm{d}(O, H) = d.$$

Die Gleichung $<\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}>= d$ heißt *hessesche Normalform* für $H \subseteq X$.

Beispiel. Im affinen euklidischen Standardraum $\mathbb{R}^3$ betrachten wir die Hyperebene $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 8\}$; gesucht ist der Abstand $\mathrm{d}(O, H) = d$ von dem Punkt $O = (-1, -3, 5)$.

Zur Lösung wird zunächst O als Koordinatenursprung gewählt; wir setzen

$$x_1 = x_1' - 1\,, \quad x_2 = x_2' - 3\,, \quad x_3 = x_3' + 5\,.$$

In den neuen Koordinaten (x_1', x_2', x_3') erhalten wir für H die Gleichung $2x_1' + x_2' + 2x_3' = 3$. Der Koeffizientenvektor auf der linken Seite hat die Norm 3, daher ergibt sich die hessesche Normalform als

$$\frac{2}{3}x_1' + \frac{1}{3}x_2' + \frac{2}{3}x_3' = 1\,,$$

und es folgt $\mathrm{d}(O, H) = 1$. ❑

Allgemein lässt sich ein lineares Gleichungssystem in eine Gestalt bringen, aus der sich durch die konstanten Terme sofort der Abstand der Lösungsmenge vom Koordinatenursprung ablesen lässt. Diese Verallgemeinerung der hesseschen Normalform ist allerdings nicht eindeutig, so dass die Bezeichnung „Normalform“ hier nicht angebracht wäre.

Satz. *Jeder nichtleere Unterraum Y des euklidischen affinen Standardraumes $\mathbb{R}^n$ ist Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems* 6/2/22

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= d_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= d_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= d_m \end{aligned}$$

mit einer Koeffizientenmatrix $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(m, n; \mathbb{R})$, deren Zeilen orthonormal sind, d.h. $<\mathrm{Z}_i(A), \mathrm{Z}_j(A)>= \delta_{ij}$.

In diesem Fall ist $\mathrm{d}(O, Y) = \sqrt{d_1^2 + \ldots + d_m^2}$ der Abstand des Unterraumes Y vom Koordinatenursprung $O = (0, \ldots, 0)$.

Beweis. Ein Gleichungssystem der angegebenen Gestalt lässt sich aus einem beliebigen linearen Gleichungssystem für Y gewinnen. Dazu wird ein äquivalentes System gewählt, für das die Zeilen der Koeffizientenmatrix linear unabhängig sind; dieses ist derart umzuformen, dass dabei die Zeilen der Koeffizientenmatrix mittels Orthonormierung (vgl. 6/2/10) die angegebene Gestalt erhalten.

Wir identifizieren nun Punkte und Vektoren im euklidischen Standardvektorraum $\mathbb{R}^n$. Mit $\boldsymbol{v}_i := \mathrm{Z}_i(A)$ ergibt sich der Untervektorraum $U := (\mathbb{R}\boldsymbol{v}_1 + \ldots + \mathbb{R}\boldsymbol{v}_m)^\perp$ als Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Systems $<\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{x}>= \boldsymbol{0}$, $i = 1, \ldots, m$. Wird $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$ zu einer Orthonormalbasis $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ von $\mathbb{R}^n$ ergänzt, dann folgt $U = (\boldsymbol{v}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$.

$\boldsymbol{x}$ sei eine Lösung des gegebenen Gleichungssystems $<\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{x}>= d_i$, $i = 1, \ldots, m$. Dann gilt $\boldsymbol{x} - \pi_U(\boldsymbol{x}) = b_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + b_m\boldsymbol{v}_m$ mit geeigneten Koeffizienten $b_i \in \mathbb{R}$ ($\pi_U :=$ orthogonale Projektion auf U). Wir erhalten für $i \leq m$

$$<\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{x}> = <\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{x} - \pi_U(\boldsymbol{x})> = <\boldsymbol{v}_i, \sum_{j=1}^{m} b_j \boldsymbol{v}_j> = b_i \,,$$

daher $b_i = d_i$, und der gesuchte Abstand ergibt sich als

$$\mathrm{d}(\mathbf{0}, Y) = \|\boldsymbol{x} - \pi_U(\boldsymbol{x})\| = \|\sum_{i=1}^{m} d_i \boldsymbol{v}_i\| = \sqrt{d_1^2 + \ldots + d_m^2}\,. \qquad ❏$$

Beispiel. Im Standardraum $\mathbb{R}^3$ sei der affine Unterraum Y als Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{llll} 4x_1 & +x_2 & +x_3 & = 21 \\ 2x_1 & & +x_3 & = 11 \\ 8x_1 & +x_2 & +3x_3 & = 43 \end{array}$$

gegeben. Der gaußsche Algorithmus führt auf die Parameterdarstellung

$$Y = \boldsymbol{p} + \mathbb{R}\boldsymbol{v} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{p} = (\frac{11}{2}, -1, 0)\,, \quad \boldsymbol{v} = (-1, 2, 2)\,.$$

Basisergänzung und Orthonormierung nach E. Schmidt ergeben

$$\boldsymbol{v}^{\perp} = \mathbb{R}\boldsymbol{v}_1 + \mathbb{R}\boldsymbol{v}_2 \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1, 0)\,, \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{45}}(2, -4, 5)\,.$$

Wir setzen $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ und erhalten durch Einsetzen von $\boldsymbol{p}$ ein neues Gleichungssystem $<\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{x}> = <\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{p}>$ $(i = 1, 2)$ für Y, dessen Koeffizientenmatrix orthonormale Zeilen besitzt,

$$<\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{x}> = \frac{10}{\sqrt{5}}\,, \quad <\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{x}> = \frac{5}{\sqrt{5}}\,.$$

Daher ist

$$\mathrm{d}(\mathbf{0}, Y) = \sqrt{\frac{100}{5} + \frac{25}{5}} = 5$$

der Abstand des Koordinatenursprungs von Y. ❏

Schwerpunkte zum gewählten Stoff

- Orthogonale Projektion auf einen affinen Unterraum [6/2/17]
- Abstand zweier affiner Unterräume [6/2/18 – 6/2/20]
- Die hessesche Normalform und ihre Verallgemeinerung [6/2/21 – 6/2/22]