Kapitel 6

Geometrie

Im weiten Feld der Geometrie befassen wir uns hier zunächst mit dem Begriff des affinen Raumes; er kommt dem Raum unserer Anschauung näher als der des Vektorraumes, in dem stets ein ausgezeichnetes Element (der Nullvektor) existiert, während nun alle Punkte gleichermaßen als *Koordinatenursprung* geeignet sind. Vektoren treten in diesem Zusammenhang als Verschiebungen von Punkten auf.
Beginnend mit dem zweiten Abschnitt beschränken wir uns auf die Grundkörper der reellen und komplexen Zahlen; in diesem Fall wird eine Abstandsmessung eingeführt. Insbesondere untersuchen wir *orthogonale Abbildungen* und *Quadriken*.
Unter geometrischen Eigenschaften räumlicher Objekte verstehen wir solche, die gegenüber bestimmten *Gruppen von Transformationen* invariant bleiben, zunächst gegenüber der *affinen Gruppe,* in der euklidischen Geometrie gegenüber der Gruppe der *Bewegungen*. Letztere erhalten insbesondere *Längen* und *Winkel*, während *eigentliche Bewegungen* darüber hinaus auch die Orientierung erhalten. Geometrie wird so zum Studium eines Raumes zusammen mit einer Transformationsgruppe. Dieser Standpunkt geht auf das *Erlanger Programm* von Felix Klein aus dem Jahr 1872 zurück.
Zum Abschluss des Kapitels wird gezeigt, wie die jordansche Normalform unter Verwendung einer Abstandsmessung zu ersten Resultaten über *lineare dynamische Systeme* führt.

6.1 Affine Räume

Im gesamten Abschnitt wird ein Grundkörper K fixiert, für den in Beispielen – soweit nicht anders vereinbart – der Körper der reellen Zahlen gewählt wird. 6/1/1

Definition. (*affiner Raum*)

Unter einem *affinen Raum* über dem Körper K verstehen wir entweder die leere Menge $\emptyset$ oder ein Tripel (X, T, τ), bestehend aus

(1) einer Menge X,

(2) einem K-Vektorraum T,

(3) einem Gruppenhomomorphismus
$$\tau : T \to S(X)\,, \quad \boldsymbol{v} \mapsto \tau_{\boldsymbol{v}}$$
der additiven Gruppe des Vektorraumes T in die symmetrische Gruppe der Menge X, so dass für alle $P, Q \in X$ genau ein Vektor $\boldsymbol{v} \in T$ existiert, für den $\tau_{\boldsymbol{v}}(P) = Q$ ist (wir nennen $\boldsymbol{v} =: \overrightarrow{PQ}$ den *Verbindungsvektor* von P und Q).

Die Elemente von X werden Punkte genannt, T heißt *Translationsvektorraum* des affinen Raumes.

Sofern keine Verwechslungen zu befürchten sind, nehmen wir nur die *zugrundeliegende Menge* X in die Bezeichnung auf, schreiben also X anstelle von (X, T, τ) und setzen bei Bedarf $\mathrm{T}(X) := T$.

Das klingt vielleicht etwas abstrakt. In Wirklichkeit wird durch den Gruppenhomomorphismus τ nur eine später präzisierte „Addition“ von Punkten und Vektoren erklärt.

(3) wird auch so ausgedrückt:
Die additive Gruppe von T *operiert einfach transitiv* auf der Menge X.

Für $\boldsymbol{v} \in T$ wird die Abbildung $\tau_{\boldsymbol{v}} : X \to X$ die durch den Vektor $\boldsymbol{v}$ bewirkte *Parallelverschiebung* oder *Translation* genannt.

Die *Dimension* des affinen Raumes X ist durch

$$\dim_K(X) := \dim_K(\mathrm{T}(X)) \quad \text{für} \quad X \neq \emptyset,$$
$$\dim_K(\emptyset) := -1$$

definiert. Ein nulldimensionaler affiner Raum heißt *Punkt*, ein eindimensionaler *Gerade* und ein zweidimensionaler *Ebene*.

Warnung. Im Gegensatz zum Begriff des Vektorraumes wird hier keine Addition der Punkte in die Definition aufgenommen. Prinzipiell existieren viele (gleichberechtigte) Möglichkeiten, eine solche Operation zu definieren: Durch Wahl eines beliebigen Punktes $P \in X$ ergibt sich eine Bijektion 6/1/2

$$T \to X, \quad \boldsymbol{v} \mapsto \tau_{\boldsymbol{v}}(P)$$

des Translationsvektorraumes T und der zugrundeliegenden Menge des affinen Raumes X. ❏

Ein Vektorraum V ein erhält (auf wohlverstandene Weise) durch $\mathrm{A}(V) := (V, V, \tau)$ mit $\tau_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}$ die Struktur eines affinen Raumes, der als *zu V gehöriger affiner Raum* bezeichnet wird. Ist insbesondere $V = K^n$ der n-dimensionale Standardvektorraum, so heißt der zugehörige affine Raum $\mathrm{A}(K^n)$ *n-dimensionaler affiner Standardraum.* Da beide (nach den bisherigen Konventionen) mit demselben Symbol K^n bezeichnet werden, ist es von nun an unumgänglich, im Einzelfall sorgfältig zu unterscheiden, worauf wir uns beziehen. ❏

Im Tripel (V, V, τ) ist an der ersten Position die zugrundeliegende Menge von V, an der zweiten der Raum selbst gemeint (erst durch die früheren Vereinbarungen sinnvoll).

Bemerkung. X sei ein affiner Raum und $P, Q, R \in X$. 6/1/3

(1) $\quad P = Q \iff \overrightarrow{PQ} = \mathbf{0}$

(2) $\quad \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$

(3) $\quad \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$

Beweis. (1) ($\Leftarrow$): τ bezeichne wieder den gegebenen Homomorphismus $\mathrm{T}(X) \to S(X)$ der Gruppe $(\mathrm{T}(X), +)$ in die Gruppe der Bijektionen von X auf sich. $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{0}$ bedeutet $Q = \tau_{\mathbf{0}}(P)$, und da τ Gruppenhomomorphismus ist, muss das Bild des neutralen Elements $\tau_{\mathbf{0}} = \mathrm{id}_X$ sein, d.h. $Q = \mathrm{id}_X(P) = P$.
Die Bedingung ist wegen $P = \tau_{\mathbf{0}}(P) = \tau_{\overrightarrow{PQ}}(P) = Q$ auch hinreichend.

... reichlich langweilig, von nun an genügen (1) – (3) anstelle von Rechnungen mit der Abbildung τ.

(2) Wir setzen $\overrightarrow{PQ} = \boldsymbol{u}$, $\overrightarrow{QR} = \boldsymbol{v}$, d.h. $\tau_{\boldsymbol{u}}(P) = Q$ und $\tau_{\boldsymbol{v}}(Q) = R$. Da τ Gruppenhomomorphismus ist, gilt $\tau_{\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}} = \tau_{\boldsymbol{v}} \cdot \tau_{\boldsymbol{u}}$, folglich $\tau_{\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}}(P) = \tau_{\boldsymbol{v}}\big(\tau_{\boldsymbol{u}}(P)\big) = \tau_{\boldsymbol{v}}(Q) = R$, daher $\overrightarrow{PR} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$.
(3) folgt aus $\tau_{\mathbf{0}} = \tau_{\boldsymbol{v}} \cdot \tau_{-\boldsymbol{v}}$. ❏

Meist besteht keine Notwendigkeit, das Symbol τ explizit zu verwenden und wir setzen

$$P + \boldsymbol{v} := \tau_{\boldsymbol{v}}(P) \quad \text{für} \quad P \in X,\ \boldsymbol{v} \in T.$$

Sind $P, Q \in X$, $\boldsymbol{v} \in T$, so ist nun die Bedingung $P + \boldsymbol{v} = Q$ äquivalent zu $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{PQ}$. Es entsteht eine Abbildung

$$X \times T \to X, \quad (P, \boldsymbol{v}) \mapsto P + \boldsymbol{v},$$

die wir *Addition von Punkten und Vektoren* nennen. Zu obiger Bemerkung ergibt sich damit die folgende

Im affinen Standardraum K^n ist die Addition von Punkten und Vektoren durch die vertraute komponentenweise Addition gegeben.

Variante. X sei ein affiner Raum, $P \in X$ und $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathrm{T}(X)$. 6/1/4

(1′) $P + \boldsymbol{u} = P \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$

(2′) $P + (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = (P + \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{v}$

Anstelle von $P + (-\boldsymbol{u})$ wird künftig auch $P - \boldsymbol{u}$ geschrieben, damit gilt

(3′) $(P - \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u} = P$.

Bemerkung – Definition. (*affine Abbildung*) 6/1/5

Eine *affine Abbildung*

$$(X, T, \tau) \to (X', T', \tau')$$

nichtleerer affiner Räume ist eine Abbildung $f : X \to X'$, zu der eine lineare Abbildung $\varphi : \mathrm{T} \to T'$ existiert mit

$$f(P + \boldsymbol{v}) = f(P) + \varphi(\boldsymbol{v}) \quad \text{für } P \in X \text{ und } \boldsymbol{v} \in \mathrm{T}(X).$$

Äquivalent lässt sich diese Bedingung so formulieren: Durch

$$\varphi(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)}\,, \quad P, Q \in X$$

ist (unabhängig von der Wahl der Punkte P, Q) eine lineare Abbildung $\varphi : T \to T'$ definiert. Diese ist dadurch eindeutig bestimmt, wird von nun an mit $\mathrm{T}(f)$ bezeichnet und heißt die *zu* f *gehörige lineare Abbildung der Translationsräume*, auch *linearer Anteil von* f.

Die Vorschrift ist also nicht von P, Q, sondern nur von dem entsprechenden Verbindungsvektor abhängig.

Da affine Abbildungen als Abbildungen der zugrundeliegenden Mengen affiner Räume definiert wurden, gibt es kein Hindernis, auch den Spezialfall des leeren affinen Raumes aufzunehmen, also die einzig mögliche Abbildung der leeren Menge in die zugrundeliegende Menge eines affinen Raumes künftig affin zu nennen.

Durch geringfügige Umformulierung der Definition ergibt sich die folgende

Bemerkung. (*Beschreibung affiner Abbildungen*) 6/1/6

Eine affine Abbildung $f : (X, T, \tau) \to (X', T', \tau')$ nichtleerer affiner Räume ist durch ein Tripel (P, P', φ) gegeben, wobei

(1) $P \in X$, $P' \in X'$,

(2) $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(T, T')$,

(3) $f(P + \boldsymbol{v}) = P' + \varphi(\boldsymbol{v})$ für alle Vektoren $\boldsymbol{v} \in T$.

Als Spezialfall (mit $P = (0, \ldots, 0)$) erhalten wir alle affinen Abbildungen $f : K^m \to K^n$ der Standardräume durch

$$f(x_1, \ldots, x_m) = (p'_1, \ldots, p'_n) + {}^{\mathrm{t}}\big(A\cdot{}^{\mathrm{t}}(x_1, \ldots, x_m)\big),$$

wobei $(p'_1, \ldots, p'_n) \in K^n$ ein fester Punkt ist und $A \in \mathrm{M}(n, m; K)$ eine Matrix bezeichnet.

Eine affine Abbildung $K^m \to K^n$ ist durch eine Matrix aus $\mathrm{M}(n, m; K)$ und ein n-Tupel gegeben.

Bemerkung. (*Funktorialität von* T) 6/1/7

(1) Die identische Abbildung $\mathrm{id}_X : X \to X$ ist affin. Im Fall $X \neq \emptyset$ ist $\mathrm{T}(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\mathrm{T}(X)}$ die Identität des Translationsraumes.

(2) Für affine Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ ist auch $g \cdot f : X \to Z$ eine affine Abbildung.
Sind die Räume X, Y, Z nicht leer, so gilt $\mathrm{T}(g) \cdot \mathrm{T}(f) = \mathrm{T}(g \cdot f)$.

Definition. (*affiner Isomorphismus*) 6/1/8

Eine affine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *affiner Isomorphismus* (auch *Affinität*), falls eine affine Abbildung $g : Y \to X$ existiert, für die $f \cdot g = \mathrm{id}_Y$ und $g \cdot f = \mathrm{id}_X$ gilt.

Leicht ist zu sehen, dass die Existenz einer solchen affinen Abbildung g zur Bijektivität von f äquivalent ist, wobei $g = f^{-1}$ sowie (für $X, Y \neq \emptyset$) $\mathrm{T}(g) = \mathrm{T}(f)^{-1}$.

Objekte der affinen Geometrie sind nun solche, die sich bei affinen Isomorphismen nicht ändern. Dazu gehören nachfolgend eingeführte Begriffe wie Parallelität, Dimension von Unterräumen und Teilverhältnis.

Existiert ein Isomorphismus $X \to Y$, so heißen die affinen Räume X und Y *isomorph.* Eine Affinität $X \to X$ heißt auch *affine Transformation* des Raumes X.

Bemerkung. X bezeichnet einen nichtleeren affinen Raum. 6/1/9

(1) $f : X \to X$ sei eine affine Abbildung. Die Bedingung $\mathrm{T}(f) = \mathrm{id}_{\mathrm{T}(X)}$ ist gleichbedeutend zur Existenz von $\boldsymbol{v} \in \mathrm{T}(X)$ mit $f = \tau_{\boldsymbol{v}}$. f heißt in diesem Fall eine *Translation;* der Vektor $\boldsymbol{v}$ ist eindeutig bestimmt und wird auch *Translationsvektor* von f genannt.

(2) Eine affine Abbildung $g : X \to Y$ in den affinen Raum Y ist genau dann injektiv (surjektiv, bijektiv), wenn $\mathrm{T}(g)$ die entsprechende Eigenschaft besitzt.

(3) Für jeden festen Punkt $P \in X$ ist die durch

$$\mathrm{A}\big(\mathrm{T}(X)\big) \to X, \quad \boldsymbol{v} \mapsto P + \boldsymbol{v}$$

definierte affine Abbildung ein affiner Isomorphismus.
Das bedeutet, bis auf Isomorphie ist jeder nichtleere affine Raum einer der Räume $\mathrm{A}(V)$, wobei V einen Vektorraum bezeichnet.

(4) Die affinen Transformationen von X bilden mit der Hintereinanderausführung von Abbildungen die *affine Gruppe* $\mathrm{GA}(X)$.
Es existiert eine exakte Folge

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathrm{T}(X) \xrightarrow[\boldsymbol{v} \mapsto \tau_{\boldsymbol{v}}]{j} \mathrm{GA}(X) \xrightarrow[f \mapsto \mathrm{T}(f)]{\pi} \mathrm{GL}(\mathrm{T}(X)) \longrightarrow \mathbf{1}$$

von Gruppenhomomorphismen (d.h. für je zwei aufeinander folgende Homomorphismen stimmt das Bild des ersten mit dem Kern des zweiten überein); dabei bezeichnen $\mathbf{0}$ bzw. $\mathbf{1}$ einelementige Gruppen.

Die Überprüfung der Exaktheit dieser Folge wird als Übungsaufgabe empfohlen. Zu beachten ist: Im Gegensatz zu entsprechenden exakten Folgen von Vektorräumen ist hier der Isomorphietyp der in der Mitte auftretenden Gruppe nicht durch die übrigen bestimmt.

Affine Unterräume 6/1/10

Definition. (*affiner Unterraum*)
Ein *affiner Unterraum* des affinen Raumes X ist eine Teilmenge Y der zugrundeliegenden Menge, so dass entweder $Y = \emptyset$ ist oder ein Punkt $P \in Y$ existiert, für den die Menge

$$\mathrm{T}_P(Y) = \{\overrightarrow{PQ} \mid Q \in Y\}$$

ein Untervektorraum des Translationsraumes $\mathrm{T}(X)$ ist.

Der Unterraum $\mathrm{T}_P(Y)$ hängt nicht von der Wahl des Punktes P ab. Ist nämlich $P' \in Y$ ein weiterer Punkt, so folgt wegen $\overrightarrow{P'P} = -\overrightarrow{PP'} \in \mathrm{T}_P(Y)$

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_{P'}(Y) &= \{\overrightarrow{P'Q} \mid Q \in Y\} = \{\overrightarrow{P'P} + \overrightarrow{PQ} \mid Q \in Y\} \\ &= \overrightarrow{P'P} + \mathrm{T}_P(Y) = \mathrm{T}_P(Y).\end{aligned}$$

Daher ist es gerechtfertigt, anstelle von $\mathrm{T}_P(Y)$ einfach $\mathrm{T}(Y)$ zu schreiben; dieser Untervektorraum von $\mathrm{T}(X)$ bildet mit der Einschränkung der Translation τ von X einen affinen Raum $(Y, T(Y), \tau|_Y)$. Y wird damit künftig selbst als affiner Raum angesehen.

Bemerkung. (*Lagebeziehung von Unterräumen*) 6/1/11

1. Die nichtleeren Unterräume Y von X mit Translationsraum $U := \mathrm{T}(Y) \subseteq \mathrm{T}(X)$ haben die Gestalt

   $$Y = P + U := \{P + \boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{u} \in U\},$$

   wobei für P ein beliebiger Punkt aus Y gewählt werden kann.

   ... triviale Umformulierung.

   Ist insbesondere V ein Vektorraum und $X = \mathrm{A}(V)$ der zugehörige affine Raum, so ist U ein Untervektorraum von $V = \mathrm{T}(X)$, und die affinen Unterräume mit Translationsraum U sind die (bereits vertrauten) Elemente des Faktorraumes V/U.

   Hier begegnet uns der Faktorraum; vgl. auch 3/2/12.

2. Der Translationsraum eines Unterraumes wird auch seine *Richtung* genannt, die Elemente *Richtungsvektoren*.
   Nichtleere Unterräume Y_1, Y_2 des affinen Raumes X heißen *parallel*, wenn $\mathrm{T}(Y_1) \subseteq \mathrm{T}(Y_2)$ oder $\mathrm{T}(Y_2) \subseteq \mathrm{T}(Y_1)$; wir schreiben dafür auch $Y_1 \,||\, Y_2$.
   Für $\dim(Y_1) = \dim(Y_2) < \infty$ ist Parallelität offenbar zu $\mathrm{T}(Y_1) = \mathrm{T}(Y_2)$ äquivalent, d.h. dazu, dass die Richtungen beider Unterräume übereinstimmen.
   Gilt beispielsweise $Y_1 \,||\, Y_2$ und $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$, so folgt $Y_1 \subseteq Y_2$ oder $Y_2 \subseteq Y_1$, im Fall gleicher Dimension beider Unterräume sogar $Y_1 = Y_2$.

Die Fälle $Y_1 \subseteq Y_2$ bzw. $Y_1 = Y_2$ werden dabei nicht ausgeschlossen.

Unterräume von X, deren Dimension 0, 1 bzw. 2 ist, werden nun Punkte, Geraden bzw. Flächen *in* X genannt.
Darüber hinaus wird im Fall $1 \leq \dim(X) < \infty$ ein Unterraum Y von X mit $\dim(Y) = \dim(X) - 1$ auch als *Hyperebene in* X bezeichnet.

Der nachfolgende Satz ist nichts anderes als eine neue Interpretation vertrauter Resultate über lineare Gleichungen und Dualität.

Satz. (*Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme*) 6/1/12

Ist $A \in \mathrm{M}(m,n;K)$ eine Matrix und $b \in \mathrm{M}(m,1;K)$, so ist die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ ein affiner Unterraum des Standardraumes K^n. Er ist genau dann nicht leer, wenn $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A,b)$; seine Dimension ist in diesem Fall $n - \mathrm{rang}(A)$.

Umgekehrt ist jeder affine Unterraum des affinen Standardraumes Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems.

Beweis. Der erste Teil des Satzes ist nur eine Neuformulierung von 2/2/8 unter Berücksichtigung von 2/3/2.
Wir zeigen, dass jeder Unterraum Y des affinen Standardraumes $X = K^n$ durch ein geeignetes lineares Gleichungssystem beschrieben wird. Der Fall $Y = \emptyset$ ist trivial, wir können beispielsweise das unlösbare System $0 = 1$ wählen.
Nun sei $Y \neq \emptyset$ und $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r\} \subseteq T(Y)$ ein Erzeugendensystem des Translationsraumes von Y. Dann wird im dualen Raum $\mathrm{T}(X)^*$ von $\mathrm{T}(X)$ ein Erzeugendensystem $\{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_s\}$ für $\mathrm{T}(Y)^\perp$ gewählt; es folgt

Hier erweisen sich unsere Kenntnisse über den dualen Vektorraum als nützlich.

$$\mathrm{T}(Y) = \mathrm{T}(Y)^{\perp\perp} = \{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_s\}^\perp$$

(vgl. 3/5/7), d.h. $\mathrm{T}(Y)$ ist Nullstellenmenge der Linearformen $\boldsymbol{w}_i$. Bezeichnet $A \in \mathrm{M}(s,n;K)$ die Matrix mit der i-ten Zeile $\mathrm{Z}_i(A) = \boldsymbol{w}_i$, so ergibt sich $\mathrm{T}(Y)$ als Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$. Wird $P \in Y$ beliebig gewählt, so ist (trivialerweise) P Lösung des Systems $Ax = b$ mit $b = A \cdot {}^{\mathrm{t}}P$. Da sich die Lösungsmenge des letzteren Systems als Menge aller Summen $P + \boldsymbol{v}$ mit $\boldsymbol{v} \in \mathrm{T}(Y)$ ergibt, ist Y selbst die Lösungsmenge von $Ax = b$. ❑

Ein (nichtleerer) affiner Unterraum lässt sich nach dem Satz sowohl durch ein lineares Gleichungssystem beschreiben als auch durch explizite Angabe der Lösungen dieses Systems. Er erhält dann die Gestalt 6/1/13

$$Y = P + K\boldsymbol{v}_1 + \ldots + K\boldsymbol{v}_r := \{P + a_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + a_r\boldsymbol{v}_r \,|\, a_i \in K\};$$

wir sprechen von einer *Parameterdarstellung für* Y. Sie ist uns bereits im Zusammenhang mit dem gaußschen Algorithmus begegnet.

Beispiel. (*Gleichungssystem für einen affinen Unterraum*)

$Y = P + \mathbb{R}\boldsymbol{v}_1 + \mathbb{R}\boldsymbol{v}_2 \subseteq \mathbb{R}^4$ sei eine Parameterdarstellung der Ebene Y im 4-dimensionalen affinen Standardraum,

$$P=(0,4,-1,-5)\,,\ \boldsymbol{v}_1=(2,-1,-3,1)\,,\ \boldsymbol{v}_2=(-3,-1,-3,2).$$

Gesucht wird ein lineares Gleichungssystem mit der Lösungsmenge Y.

Zunächst ist $U:=\mathrm{T}(Y)=\mathbb{R}\boldsymbol{v}_1+\mathbb{R}\boldsymbol{v}_2$ der Translationsraum von Y, und es gilt $U=W^\perp$, wobei W den Raum derjenigen Linearformen auf $\mathbb{R}^4$ bezeichnet, die auf U verschwinden,

$$W=\{\boldsymbol{u}\in(\mathbb{R}^4)^*\mid <\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_1>=<\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_2>=0\}\,.$$

Schreiben wir (x_1,x_2,x_3,x_4) für das Koordinatenquadrupel eines Vektors $\boldsymbol{u}\in(\mathbb{R}^4)^*$ bezüglich der dualen Basis $(\boldsymbol{e}_1^*,\ldots,\boldsymbol{e}_4^*)$, so ist die Bedingung $\boldsymbol{u}\in W$ äquivalent dazu, dass das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix}2&-1&-3&1\\-3&-1&-3&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

erfüllt ist. Eine zeilenäquivalente Umformung der Koeffizientenmatrix ergibt die Stufenmatrix

$$\begin{pmatrix}2&-1&-3&1\\0&-5&-15&7\end{pmatrix},$$

aus der sich eine Basis $\big((0,-3,1,0),(1,7,0,5)\big)$ der Lösungsmenge ablesen lässt. Bezeichnet A die Matrix mit diesen Zeilen, so ist $Ax=A\cdot{}^{\mathrm{t}}P$ ein Gleichungssystem, dessen Lösungsmenge den Punkt $P\in Y$ enthält und dessen zugehöriges homogenes System die Lösungsmenge $\mathrm{T}(Y)=U$ besitzt.

Wir verwenden hier wieder den Trick, bei dem keine Brüche auftreten.

Wir erhalten

$$\begin{aligned}-3x_2+x_3&=-13\\x_1+7x_2+5x_4&=3\end{aligned}$$

als lineares Gleichungssystem mit der Lösungsmenge Y. ❏

Beispiel. (*Untersuchung der Lagebeziehung affiner Unterräume*)
Im affinen Standardraum $\mathbb{F}_2^5$ sind die Unterräume

$$\begin{aligned}Y&:=P+\mathbb{F}_2\cdot\boldsymbol{y}_1+\mathbb{F}_2\cdot\boldsymbol{y}_2+\mathbb{F}_2\cdot\boldsymbol{y}_3\,,\\Z&:=Q+\mathbb{F}_2\cdot\boldsymbol{z}_1+\mathbb{F}_2\cdot\boldsymbol{z}_2+\mathbb{F}_2\cdot\boldsymbol{z}_3\end{aligned}$$

durch

$$\begin{aligned}&P=(1,1,0,1,0),\quad Q=(1,0,1,1,1)\,,\\&\boldsymbol{y}_1=(1,1,1,0,1),\quad \boldsymbol{y}_2=(1,0,1,1,1),\quad \boldsymbol{y}_3=(0,1,0,0,1),\\&\boldsymbol{z}_1=(1,1,1,1,0),\quad \boldsymbol{z}_2=(0,1,1,1,0),\quad \boldsymbol{z}_3=(0,1,1,1,0)\end{aligned}$$

gegeben. Es soll festgestellt werden, ob Y und Z parallel sind.

Der Translationsraum $\mathrm{T}(Y)$ ist von den Vektoren $\boldsymbol{y}_i$ erzeugt, entsprechend der Translationsraum $\mathrm{T}(Z)$ von den Vektoren $\boldsymbol{z}_j$.
Werden $\boldsymbol{y}_i$ als Spalten einer Matrix $A\in\mathrm{M}(5,3;\mathbb{F}_2)$ und $\boldsymbol{z}_j$ als Spalten einer Matrix $B\in\mathrm{M}(5,3;\mathbb{F}_2)$ gewählt, so ist offenbar Y genau dann zu Z parallel, wenn $\mathrm{rang}(A,B)=\mathrm{rang}(A)$ oder $\mathrm{rang}(A,B)=\mathrm{rang}(B)$ ist. Um dies zu prüfen, wird die Matrix

Wie ändert sich der Spaltenraum einer Matrix, wenn weitere Spalten hinzugenommen werden?

$$(A,B)=\begin{pmatrix}1&1&0&1&0&0\\1&0&1&1&1&1\\1&1&0&1&1&1\\0&1&0&1&1&1\\1&1&1&0&0&0\end{pmatrix}$$

mit dem gaußschen Algorithmus umgeformt. Wir erhalten eine zeilenäquivalente Stufenmatrix

$$\begin{pmatrix}1&1&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&1\\0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Es folgt $\operatorname{rang}(A) = 3$ und $\operatorname{rang}(A, B) = 4$, Parallelität kann daher nur vorliegen, wenn $\operatorname{rang}(B) = \operatorname{rang}(A, B)$ ist. Da B nur drei Spalten besitzt, ist jedoch $\operatorname{rang}(B) \leq 3 < \operatorname{rang}(A, B)$. Damit sind die Unterräume Y und Z nicht parallel. ❏

Es zeigt sich, dass zu einer beliebigen Teilmenge eines affinen Raumes ein kleinster Unterraum existiert, der diese enthält.

Lemma. (*Durchschnitt affiner Unterräume*) 6/1/14

$(Y_i)_{i\in I}$ sei eine Familie von Unterräumen des affinen Raumes X.
Dann ist der Durchschnitt $\bigcap_{i\in I} Y_i$ ebenfalls ein affiner Unterraum, und im Fall $\bigcap_{i\in I} Y_i \neq \emptyset$ gilt

$$\mathrm{T}\Big(\bigcap_{i\in I} Y_i\Big) = \bigcap_{i\in I} \mathrm{T}(Y_i).$$

Beweis. Für $\bigcap_{i\in I} Y_i = \emptyset$ ist die Behauptung trivial. Anderenfalls wählen wir einen Punkt $P \in Y := \bigcap_{i\in I} Y_i$; die Bedingung $Q \in Y$ ist dann äquivalent zu $\overrightarrow{PQ} \in \bigcap_{i\in I} \mathrm{T}(Y_i)$, d.h. $Y = P + \bigcap_{i\in I} \mathrm{T}(Y_i)$, und der Durchschnitt der Untervektorräume $\mathrm{T}(Y_i)$ ist nach 3/1/17 selbst Untervektorraum des Translationsraumes $\mathrm{T}(X)$. ❏

Y_i ist affiner Unterraum, daher $\overrightarrow{PQ} \in \mathrm{T}(Y_i) \iff Q \in Y_i$.

Aus dem Lemma ergibt sich insbesondere 6/1/15

Satz – Definition. (*Verbindungsraum*)

X sei ein affiner Raum. Ist $M \subseteq X$ eine Teilmenge, dann ist der Durchschnitt aller affinen Unterräume von X, die M enthalten, ebenfalls ein affiner Unterraum; er heißt der *Verbindungsraum* $\bigvee M$ der Menge M.

Bezeichnungen. Für eine Familie $(Y_i)_{i\in I}$ affiner Unterräume von X setzen wir

$$\bigvee_{i\in I} Y_i := \bigvee\Big(\bigcup_{i\in I} Y_i\Big);$$

Hier steht nur das, was ohnehin nahe liegend wäre. Der Begriff der *Verbindungsgeraden* wird nachfolgend öfter verwendet.

im Fall einer endlichen Familie $(Y_0, \ldots, Y_r)$ von Unterräumen $Y_i \subseteq X$ wird auch das Symbol

$$\bigvee_{i=0}^{r} Y_i = Y_0 \vee \ldots \vee Y_r$$

verwendet. Insbesondere erhalten wir im Fall $Y_i = \{P_i\}$ (mit etwas nachlässiger Bezeichnung) den Verbindungsraum $P_0 \vee \ldots \vee P_r$ der Punkte $P_0, \ldots, P_r$. Dann liegen die Vektoren $\overrightarrow{P_0P_i}$ im Translationsraum von $Y := P_0 \vee \ldots \vee P_r$, d.h. der affine Unterraum $Y' := P_0 + K\cdot\overrightarrow{P_0P_1} + \ldots + K\cdot\overrightarrow{P_0P_r}$ ist in Y enthalten. Da er offensichtlich P_0 und die Punkte $P_i = P_0 + \overrightarrow{P_0P_i}$ $(i > 0)$ enthält, folgt $Y' = Y$, und es ergibt sich

$$P_0 \vee \ldots \vee P_r = P_0 + K\cdot\overrightarrow{P_0P_1} + \ldots + K\cdot\overrightarrow{P_0P_r}.$$

Sind insbesondere $P_0, P_1 \in X$ zwei verschiedene Punkte, so ist

$$P_0 \vee P_1 = P_0 + K\cdot\overrightarrow{P_0P_1}$$

wegen $\overrightarrow{P_0P_1} \neq \mathbf{0}$ ein eindimensionaler affiner Unterraum von X; er heißt *Verbindungsgerade* der beiden Punkte.

Definition. Eine Teilmenge M des affinen Raumes X, für die $X = \bigvee M$ ist, heißt *affines Erzeugendensystem*. Die Bezeichnung wird sinngemäß auch für Familien von Punkten verwendet. 6/1/16

Der Translationsraum von $\bigvee M$ ist der kleinste Untervektorraum von $\mathrm{T}(X)$, der alle Verbindungsvektoren $\overrightarrow{PQ}$ mit $P, Q \in M$ enthält, d.h. er ist die lineare Hülle $\mathrm{T}(\bigvee M) = \mathrm{L}_K(\{\overrightarrow{PQ} \mid P, Q \in M\})$. Daraus ergibt sich:

Bemerkung. $(P_i)_{i\in I}$ sei eine nichtleere Familie von Punkten im affinen Raum X und $i_0 \in I$ ein beliebiger Index. 6/1/17

(1) $\mathrm{T}\big(\bigvee(P_i)_{i\in I}\big) = \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} K\cdot\overrightarrow{P_{i_0}P_i}$.

(2) Die Familie $(P_i)_{i\in I}$ bildet genau dann ein affines Erzeugendensystem für X, wenn die Vektoren $\overrightarrow{P_{i_0}P_i}$ mit $i \neq i_0$ den Vektorraum $\mathrm{T}(X)$ erzeugen.

Beispielsweise bildet im affinen Raum $\mathrm{A}(V)$ die Menge $M = \{\mathbf{0}\} \cup E$ ein affines Erzeugendensystem, wenn E ein Erzeugendensystem des K-Vektorraumes V ist.

Eine Beschreibung des Translationsraumes und damit auch der Dimension des Verbindungsraumes zweier Unterräume gibt der folgende

Satz. *Y_1 und Y_2 seien nichtleere Unterräume des affinen Raumes X. Dann gilt* 6/1/18

$$\mathrm{T}(Y_1 \vee Y_2) = \begin{cases} \mathrm{T}(Y_1) + \mathrm{T}(Y_2) & \text{für } Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset \\ \big(\mathrm{T}(Y_1) + \mathrm{T}(Y_2)\big) \bigoplus K\cdot\overrightarrow{P_1P_2} & \text{für } Y_1 \cap Y_2 = \emptyset, \end{cases}$$

wobei im zweiten Fall $P_i \in Y_i$ beliebig gewählte Punkte sind.

Ist $\dim(Y_1) < \infty$ und $\dim(Y_2) < \infty$, so folgt insbesondere

$$\dim(Y_1 \vee Y_2) = \begin{cases} \dim(Y_1) + \dim(Y_2) - \dim(Y_1 \cap Y_2) & \text{für } Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset, \\ \dim(Y_1) + \dim(Y_2) - \dim\big(\mathrm{T}(Y_1) \cap \mathrm{T}(Y_2)\big) + 1 & \text{für } Y_1 \cap Y_2 = \emptyset. \end{cases}$$

Achtung: Im Gegensatz zur entsprechenden Formel für Untervektorräume gibt es hier eine unerfreuliche Fallunterscheidung!

Beweis. Im ersten Fall wird ein Punkt $P \in Y_1 \cap Y_2$ gewählt. Dann gilt

$$\mathrm{T}(Y_1 \vee Y_2) = \{\overrightarrow{PQ} \mid Q \in Y_1 \vee Y_2\} \supseteq \mathrm{T}(Y_1) \cup \mathrm{T}(Y_2),$$

und da $\mathrm{T}(Y_1 \vee Y_2)$ selbst ein Untervektorraum von $\mathrm{T}(X)$ ist, auch

$$\mathrm{T}(Y_1 \vee Y_2) \supseteq \mathrm{T}(Y_1) + \mathrm{T}(Y_2).$$

Gleichheit folgt, da der affine Unterraum $P + \big(\mathrm{T}(Y_1) + \mathrm{T}(Y_2)\big)$ bereits $Y_1 \vee Y_2$ umfasst, was sich dann auf die Translationsräume überträgt.

Wir wenden uns dem zweiten Fall zu und setzen $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$ voraus. Nun werden Punkte $P_i \in Y_i$ gewählt, $Z := P_1 \vee P_2$ bezeichnet ihre Verbindungsgerade. Dann gilt insbesondere $Y_2 \cap Z \neq \emptyset$ und $Y_1 \cap (Y_2 \vee Z) \neq \emptyset$; nach der im ersten Teil des Beweises überprüften Formel ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathrm{T}(Y_1 \vee Y_2) &= \mathrm{T}(Y_1 \vee Y_2 \vee Z) \\ &= \mathrm{T}(Y_1) + \mathrm{T}(Y_2 \vee Z) = \mathrm{T}(Y_1) + \mathrm{T}(Y_2) + \mathrm{T}(Z),\end{aligned}$$

und es bleibt zu zeigen $(\mathrm{T}(Y_1) + \mathrm{T}(Y_2)) \cap \mathrm{T}(Z) = \mathbf{0}$. Nun gilt $\mathrm{T}(Z) = K\cdot\overrightarrow{P_1P_2}$, d.h. falls der Durchschnitt vom Nullunterraum verschieden ist, muss $\overrightarrow{P_1P_2} \in \mathrm{T}(Y_1) + \mathrm{T}(Y_2)$ sein, also $\overrightarrow{P_1P_2} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$ mit $\boldsymbol{u}_i \in \mathrm{T}(Y_i)$. Es folgt $P_1 + \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 = P_2$, d.h. $P_1 + \boldsymbol{u}_1 = P_2 - \boldsymbol{u}_2 \in Y_1 \cap Y_2$, ↯.

Zum Beweis der Dimensionsformeln bleibt noch zu bemerken, dass im Fall $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$ stets $\mathrm{T}(Y_1 \cap Y_2) = \mathrm{T}(Y_1) \cap \mathrm{T}(Y_2)$ ist; dies ist ein Spezialfall von 6/1/14. Die Behauptung folgt nun aus der Dimensionsformel für die Summe zweier Unterräume eines Vektorraumes (vgl. 3/3/22 (4)). ❑

Beispiel. (*Lagebeziehungen von Geraden in der Ebene*)

E sei eine affine Ebene und G_1, G_2 Geraden in E. Dann gibt es die folgenden Möglichkeiten.

Hier ergibt sich, was unsere Anschauung erwarten lässt.

1. $G_1 \cap G_2 = \emptyset$

   In diesem Fall besagt der Satz 6/1/18

$$\dim\big(\mathrm{T}(G_1)\cap\mathrm{T}(G_2)\big) = \underbrace{\dim(G_1)}_{1}+\underbrace{\dim(G_2)}_{1}+1-\underbrace{\dim(G_1\vee G_2)}_{\leq\dim(E)=2}\geq 1,$$

und da der Vektorraum $\mathrm{T}(G_1)\cap\mathrm{T}(G_2)$ höchstens eindimensional sein kann, ergibt sich Gleichheit, d.h. $\mathrm{T}(G_1)=\mathrm{T}(G_2)=\mathrm{T}(G_1)\cap\mathrm{T}(G_2)$, folglich $G_1\,||\,G_2$ und $G_1\neq G_2$.

2. $G_1\cap G_2\neq\emptyset$
   Aus $\dim(G_i)=1$ folgt $\dim(G_1\cap G_2)\leq 1$, also $G_1=G_2$ oder $G_1\cap G_2$ ist ein Punkt.

Korollar. (*Hyperebenenschnitte*) 6/1/19

H sei eine Hyperebene im n-dimensionalen affinen Raum X ($1\leq n<\infty$). Ist Y ein nichtleerer Unterraum von X, so gilt $Y\,\|\,H$ oder $\dim(Y\cap H)=\dim(Y)-1$.

Beweis. Ist $Y\cap H\neq\emptyset$, so folgt aus dem Satz

$$\dim(Y\cap H)=\dim(Y)+\underbrace{\dim(H)}_{n-1}-\underbrace{\dim(Y\vee H)}_{n\text{ oder }n-1}.$$

Abhängig davon, welcher der möglichen Fälle eintritt, gilt $\dim(Y\cap H)=\dim(Y)-1$ oder $\dim(Y\cap H)=\dim(Y)$, also $Y\cap H=Y$ und damit $Y\subseteq H$ als Spezialfall der Parallelität.

Im Fall $Y\cap H=\emptyset$ muss (wegen $Y\neq\emptyset$) $\dim(Y\vee H)=n$ sein, daher ergibt sich aus dem zweiten Teil des Satzes

$$\dim\big(\mathrm{T}(Y)\cap\mathrm{T}(H)\big)=\dim(Y)+\dim(H)-\dim(Y\vee H)+1=\dim(Y),$$

d.h. $\dim\big(\mathrm{T}(Y)\cap\mathrm{T}(H)\big)=\dim\big(\mathrm{T}(Y)\big)$ und folglich $\mathrm{T}(Y)\subseteq\mathrm{T}(H)$. ❏

Schwerpunkte zum gewählten Stoff

- Der Begriff des affinen Raumes [6/1/1 – 6/1/4]
- Beispiele affiner Räume [6/1/2]
- Affine Abbildungen und die zugehörigen linearen Abbildungen der Translationsräume [6/1/5]
- Erste Eigenschaften affiner Abbildungen [6/1/6 – 6/1/9]
- Die affine Gruppe [6/1/9 (4)]
- Der Begriff des affinen Unterraumes [6/1/10]
- Affine Unterräume des Standardraumes als Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme [6/1/12]
- Lagebeziehungen von Unterräumen [6/1/11 – 6/1/13]
- Durchschnitt affiner Unterräume und Verbindungsraum einer Menge von Punkten [6/1/14 – 6/1/17]
- Dimension des Verbindungsraumes zweier affiner Unterräume [6/1/18 – 6/1/19]

Sachverzeichnis

Symbole