HINWEIS:
Sie finden hier eine **vorläufige Kurzfassung** des Inhalts; es sind weder Beweise ausgeführt noch ausführliche Beispiele angegeben. Bitte informieren Sie sich in der Vorlesung.

© M. Roczen und H. Wolter
Preview zur aktuellen Fassung:
Lineare Algebra individuell
Online Ver. 0.52, 12.5.2005

5.2 Diagonalisierbarkeit und Trigonalisierung

Die Untersuchung der Nullstellen des charakteristischen Polynoms führt nachfolgend auf Bedingungen für die Existenz einer Diagonalmatrix unter den zu einem Endomorphismus gehörigen Matrizen. 5/2/1

Bemerkung – Definition. (*Diagonalisierbarkeit*)

$\varphi : V \to V$ sei ein Endomorphismus des Vektorraumes V. Dann sind die folgenden beiden Bedingungen äquivalent; φ wird in diesem Fall *diagonalisierbar* genannt.

(1) V besitzt eine Basis $\mathcal{B} = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$, die aus Eigenvektoren $\boldsymbol{v}_i$ der linearen Abbildung φ besteht.

(2) Es existiert eine Basis $\mathcal{B} = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ von V, für die
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$
eine Diagonalmatrix ist.

Mit diesen Bezeichnungen gilt $\varphi(\boldsymbol{v}_i) = \lambda_i \boldsymbol{v}_i$, d.h. $\boldsymbol{v}_i$ ist Eigenvektor zum Eigenwert λ_i, und es ist leicht zu sehen, dass jeder Eigenwert von φ eine der Zahlen λ_i ist.

$A \in \mathrm{M}(n; K)$ heißt *diagonalisierbare Matrix*, falls der durch A definierte Endomorphismus des Standardraumes K^n diagonalisierbar ist. Die Bedingung ist offenbar dazu äquivalent, dass A einer Diagonalmatrix ähnlich ist: Es muss eine Matrix $U \in \mathrm{GL}(n; K)$ existieren, für die $U^{-1} \cdot A \cdot U$ Diagonalgestalt besitzt.

Nachfolgend wird in mehreren Schritten ein Kriterium für die Diagonalisierbarkeit eines Endomorphismus hergeleitet.

Lemma 1. *Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$ paarweise verschiedene Eigenwerte von φ sowie $\boldsymbol{v}_i \in V_{\lambda_i} \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ Eigenvektoren zu λ_i, $i = 1, \ldots, m$, dann ist die Familie $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$ linear unabhängig.* 5/2/2

In einem Spezialfall lässt sich nun aus der Kenntnis der Eigenwerte bereits Diagonalisierbarkeit folgern.

Satz. *Es sei $n = \dim_K(V)$. Besitzt der Endomorphismus $\varphi : V \to V$ n verschiedene Eigenwerte, so ist er diagonalisierbar.* 5/2/3

Definition. (*algebraische und geometrische Multiplizität*) 5/2/4

χ_φ bezeichne das charakteristische Polynom von $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ und $\lambda \in K$ eine Nullstelle.

(1) Die *algebraische Multiplizität* des Eigenwertes λ von φ ist die Multiplizität $\alpha_\varphi(\lambda)$ der Nullstelle λ des Polynoms χ_φ.

(2) Die *geometrische Multiplizität* des Eigenwertes λ von φ ist die Dimension $\gamma_\varphi(\lambda) := \dim_K(V_\lambda)$ des Eigenraumes $V_\lambda := \ker(\lambda \cdot \mathrm{id}_V - \varphi)$ zum Eigenwert λ.

(3) Die (1) und (2) entsprechenden Bezeichnungen werden sinngemäß auch für Matrizen aus $\mathrm{M}(n; K)$ verwendet.

Lemma 2. *Für einen beliebigen Eigenwert λ von φ gilt* 5/2/5

$$1 \leq \gamma_\varphi(\lambda) \leq \alpha_\varphi(\lambda) \leq \dim(V).$$

Satz. (*Diagonalisierbarkeit eines Endomorphismus*) 5/2/6

$\varphi : V \to V$ sei ein Endomorphismus, dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent.

(1) *Das charakteristische Polynom von φ ist Produkt linearer Polynome, und für jede Nullstelle λ von χ_φ ist $\gamma_\varphi(\lambda) = \alpha_\varphi(\lambda)$.*

(2) *Bezeichnen $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ die (paarweise verschiedenen) Eigenwerte von φ, so ist V direkte Summe der zugehörigen Eigenräume,*

$$V = V_{\lambda_1} \oplus \ \ldots \ \oplus V_{\lambda_t}.$$

(3) *Bezeichnen $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ die (paarweise verschiedenen) Eigenwerte von φ, so ist V Summe der zugehörigen Eigenräume,*

$$V = V_{\lambda_1} + \ldots + V_{\lambda_t}.$$

(4) *φ ist diagonalisierbar.*

Ein diagonalisierbarer Endomorphismus φ mit den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ 5/2/7
lässt sich offensichtlich als Summe

$$\varphi = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i \pi_i \quad (\ \pi_i \ \text{ Projektion von } V = \bigoplus_{j=1}^{t} V_{\lambda_i} \ \text{ auf } V_{\lambda_i}\ )$$

beschreiben. Diese Summendarstellung wird auch als *Spektralzerlegung* von φ bezeichnet. Der Name deutet eine Beziehung zur Physik an. Tatsächlich haben diagonalisierbare Endomorphismen etwas mit der Lösung linearer Differenzialgleichungssysteme zu tun; es handelt sich sozusagen um den bestmöglichen Fall. ❏

Die praktische Ausführung der Diagonalisierung einer Matrix $A \in \mathrm{M}(n; K)$ folgt genau den Überlegungen, die zum Beweis des Satzes 5/2/6 geführt haben:

(1) Berechnung von $\chi_A = \det(X \cdot \mathrm{E}_n - A) \in K[X]$,

(2) Faktorzerlegung des Polynoms χ_A (im Fall der Diagonalisierbarkeit treten nur Linearfaktoren auf),

(3) Bestimmung von Basen der Eigenräume V_λ zu allen Nullstellen λ von χ_A durch Lösung der entsprechenden homogen linearen Gleichungssysteme.

Die Matrix A ist genau dann diagonalisierbar, wenn wir im letzten Schritt insgesamt n Vektoren $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ erhalten. In diesem Fall ist $(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ eine Basis aus Eigenvektoren.

Halbeinfache Endomorphismen

Definition. Ein Endomorphismus $\varphi : V \to V$ des K-Vektorraumes V heißt *halbeinfach*, falls der durch Skalarerweiterung mit einem Zerfällungskörper K' seines charakteristischen Polynoms entstehende Endomorphismus 5/2/8

$$\varphi_{K'} = K' \otimes_K \varphi : V_{K'} \to V_{K'}$$

des K'-Vektorraumes $V_{K'} = K' \otimes_K V$ diagonalisierbar ist (vgl. 4/4/9).

Entsprechend heißt $A \in \mathrm{M}(n; K)$ *halbeinfache Matrix*, wenn sie – betrachtet als Matrix über einem Zerfällungskörper ihres charakteristischen Polynoms – diagonalisierbar ist.

Ein Endomorphismus ist genau dann halbeinfach, wenn seine Matrix bezüglich einer (beliebigen) Basis halbeinfach ist (4/4/10 (2)).

Eine halbeinfache Matrix $A \in \mathrm{M}(n; K)$ ist durch die Eigenschaft charakterisiert, dass $U^{-1} \cdot A \cdot U$ diagonal ist für eine geeignete reguläre Matrix U über einem Erweiterungskörper von K. Insbesondere sind diagonalisierbare Matrizen halbeinfach.

Für eine reelle Matrix kommen als Zerfällungskörper des charakteristischen Polynoms $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ infrage (vgl. 2/4/19), daher ist Halbeinfachheit äquivalent zur Diagonalisierbarkeit über den komplexen Zahlen. Eine komplexe Matrix ist dagegen genau dann halbeinfach, wenn sie diagonalisierbar ist.

Das Auffinden von Nullstellen eines Polynoms kann schwierig sein. In speziellen Situationen ist Halbeinfachheit jedoch ohne explizite Kenntnis der Nullstellen des charakteristischen Polynoms ersichtlich.

Besitzen Endomorphismen bezüglich derselben Basis eine Diagonalmatrix, so heißen sie *simultan diagonalisierbar*. Diese Bedingung lässt sich folgendermaßen charakterisieren. 5/2/9

Satz. *$\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ seien diagonalisierbare Endomorphismen des Vektorraumes V sowie $\varphi_i \cdot \varphi_j = \varphi_j \cdot \varphi_i$, $i, j \in \{1, \ldots, m\}$. Dann sind diese simultan diagonalisierbar, d.h. es existiert eine Basis $\mathcal{B}$ von V, für die alle $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi_i)$ ($i = 1, \ldots, m$) Diagonalmatrizen sind.*

Wir bemerken noch, dass simultane Diagonalisierbarkeit auch dafür hinreichend ist, dass Endomorphismen kommutieren (entsprechend der Multiplikation von Diagonalmatrizen).

Korollar. *φ und ψ seien Endomorphismen des Vektorraumes V mit der Eigenschaft $\varphi \cdot \psi = \psi \cdot \varphi$.* 5/2/10

(1) *Sind φ und ψ diagonalisierbar, so ist auch $\varphi + \psi$ diagonalisierbar.*

(2) *Sind φ und ψ halbeinfach, so ist auch $\varphi + \psi$ halbeinfach.*

Invariante Unterräume 5/2/11

Definition. $\varphi : V \to V$ sei ein Endomorphismus des Vektorraumes V. Ein Unterraum U von V heißt *φ-invariant*, falls $\varphi(U) \subseteq U$.

Durch die Eigenraumzerlegung eines diagonalisierbaren Endomorphismus φ ergibt sich V als direkte Summe invarianter Unterräume; die Einschränkung von φ auf den Eigenraum V_λ ist dabei die Abbildung $\lambda \cdot \mathrm{id}_{V_\lambda}$. Gilt überdies $\dim(V_\lambda) > 1$, so lässt sich die Zerlegung weiter verfeinern, denn durch Wahl einer Basis finden wir eine direkte Summenzerlegung der Eigenräume in eindimensionale invariante Unterräume. Dies ist allerdings eine sehr spezielle Situation.

Bemerkung. $V = U_1 \bigoplus \ldots \bigoplus U_t$ sei eine direkte Zerlegung des Vektorraumes V in eine Summe φ-invarianter Unterräume U_i und φ_i bezeichne die Einschränkung von φ auf U_i. Dann ist $\varphi = \varphi_1 \bigoplus \ldots \bigoplus \varphi_t$ die durch lineare Fortsetzung gegebene direkte Summe der Endomorphismen $\varphi_i : V_i \to V_i$. 5/2/12

Werden Basen $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_t$ der Unterräume $U_1, \ldots, U_t$ (in dieser Reihenfolge) zu einer Basis $\mathcal{B}$ von V zusammengefügt, so ergibt sich die Matrix von φ als Blockdiagonalmatrix

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} M_{\mathcal{B}_1}(\varphi_1) & & & \mathbf{0} \\ & M_{\mathcal{B}_2}(\varphi_2) & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & M_{\mathcal{B}_t}(\varphi_t) \end{pmatrix}.$$

Umgekehrt ist es offensichtlich, dass zu einem Endomorphismus mit einer entsprechenden Matrix eine Zerlegung von V in invariante Unterräume gehört.

Die in diesem Kapitel behandelte Frage ist in gewisser Weise die nach den „Bausteinen“ von Endomorphismen, d.h. nach Paaren (V, φ), für die keine nichttriviale direkte Zerlegung in eine Summe invarianter Unterräume existiert. Darüber hinaus stellt sich die Frage nach der Eindeutigkeit einer solchen Zerlegung.

Wie wir gesehen haben, ist die Forderung nach einer direkten Summenzerlegung in eindimensionale invariante Unterräume im Allgemeinen zu stark. Anders verhält es sich mit den anschließend erläuterten invarianten „Filtrierungen“.

Trigonalisierung 5/2/13

Nachfolgend zeigt sich, dass für einen beliebigen Endomorphismus (wenigstens nach Erweiterung des Grundkörpers) eine Basis existiert, bezüglich der er eine obere Dreiecksmatrix besitzt. Dieser Satz wird in 5.3 wesentlich verschärft; hier entsteht ein erster Eindruck von dem später behandelten Problem, ein System von Normalformen der Ähnlichkeitsrelation zu finden.

Definition. (*Fahnen eines Vektorraumes*)

(1) Eine Folge $(U_0, U_1, \ldots, U_t)$ von Unterräumen des Vektorraumes V heißt *Fahne der Länge* t (auch *aufsteigende Filtrierung der Länge* t), falls

$$U_1 \subseteq U_2 \subseteq \ldots \subseteq U_t$$

ist mit $U_0 = \mathbf{0}$, $U_t = V$ und $U_i \neq U_{i+1}$ für $i = 0, \ldots, t-1$.

(2) Eine *maximale* oder *vollständige* Fahne ist eine Fahne der Länge $\dim(V)$ im endlichdimensionalen Vektorraum V.

(3) Ist $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus und $(U_0, U_1, \ldots, U_t)$ eine Fahne in V, so heißt diese *φ-invariant*, falls $\varphi(U_i) \subseteq U_i$ für $i = 1, \ldots, t$.

Bemerkung. $(U_0, U_1, \ldots, U_n)$ sei eine vollständige Fahne in V. 5/2/14

(1) $\dim(U_i) = i$ für $i = 0, \ldots, n$, denn
$$0 = \dim(U_0) < \dim(U_1) < \ldots < \dim(U_n) = n,$$
daher kann die Differenz zweier aufeinander folgender Dimensionen nicht größer als 1 sein.

(2) Ist $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ eine Basis von V, so ist durch $U_0 = \mathbf{0}$, $U_i = K\boldsymbol{b}_1 + \ldots + K\boldsymbol{b}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ eine vollständige Fahne definiert; sie heißt die *zur Basis $\mathcal{B}$ gehörige Fahne*.

Ist die zur Basis $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ gehörige Fahne φ-invariant, so können höchstens die ersten i Koordinaten des Bildvektors $\varphi(\boldsymbol{b}_i)$ von 0 verschieden sein.

Bemerkung – Definition. (*Trigonalisierbarkeit*) 5/2/15

$\varphi : V \to V$ sei ein Endomorphismus, dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent.

(1) *Es existiert eine vollständige φ-invariante Fahne in V.*

(2) *Es existiert eine Basis $\mathcal{B}$ von V, für die $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ eine obere Dreiecksmatrix ist.*

Der Endomorphismus φ heißt in diesem Fall *trigonalisierbar*.

Sind die obigen Bedingungen erfüllt, so gilt insbesondere: Die Hauptdiagonale der Matrix $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ unter (2) besteht aus den Eigenwerten von φ, die darin mit den jeweiligen algebraischen Multiplizitäten auftreten.

Entsprechend heißt $A \in \mathrm{M}(n; K)$ eine *trigonalisierbare Matrix,* wenn der zugehörige Endomorphismus φ des Standardraumes K^n mit $\mathrm{M}(\varphi) = A$ trigonalisierbar ist.

Satz. *Ein Endomorphismus $\varphi : V \to V$ des K-Vektorraumes V ist genau dann trigonalisierbar, wenn sein charakteristisches Polynom $\chi_\varphi \in K[X]$ in Linearfaktoren zerfällt.* 5/2/16

Korollar. *Jeder Endomorphismus $\varphi : V \to V$ des K-Vektorraumes V ist über dem Zerfällungskörper seines charakteristischen Polynoms trigonalisierbar. Insbesondere ist im Fall $K = \mathbb{C}$ jeder Endomorphismus trigonalisierbar.* 5/2/17

Als *Trigonalisierung einer quadratischen Matrix A* bezeichnen wir das Auffinden einer oberen Dreiecksmatrix B in ihrer Ähnlichkeitsklasse, ggf. zusammen mit einer regulären Matrix U, für die $U^{-1} \cdot A \cdot U = B$ ist. Rechnerisch lässt sich das analog zum Beweis des Satzes 5/2/16 ausführen, wobei natürlich das charakteristische Polynom der Matrix Produkt von Linearfaktoren sein muss.