© M. Roczen und H. Wolter
Preview zur aktuellen Fassung:
Lineare Algebra individuell
Online Ver. 0.52, 3.5.2005

Kapitel 5

Endomorphismen von Vektorräumen

$V \neq \mathbf{0}$ sei ein Vektorraum über dem Körper K und $n = \dim_K(V) < \infty$. Die Endomorphismen $\varphi : V \to V$ werden bezüglich einer Basis $\mathcal{B}$ von V durch die zugeordnete Matrix $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ beschrieben; variiert $\mathcal{B}$, so entstehen (im Allgemeinen) unterschiedliche Matrizen. Die Fragestellung nach einer Normalform trat implizit schon im 18. Jahrhundert auf. Sie wurde in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts durch C. Jordan (zunächst über den Körpern $\mathbb{F}_p$, dann über $\mathbb{C}$) behandelt und später durch M. Hamburger in geschlossener Form dargestellt. Ein wichtiges Motiv war die Untersuchung linearer Differenzialgleichungen.

Dieses Kapitel gibt eine Einführung in die Klassifikation der Endomorphismen eines Vektorraumes. Die Aufgabenstellung ist äquivalent zum Auffinden eines Systems von Normalformen der hier als Ähnlichkeit bezeichneten Äquivalenzrelation $\approx$ auf der Menge $\mathrm{M}(n;K)$ quadratischer Matrizen über K. Es ist nahe liegend, nach „möglichst einfachen“ Repräsentanten der Klassen zu suchen.

5.1 Eigenwerte und charakteristisches Polynom

Das Problem lässt sich bereits an einfachen Beispielen recht gut verstehen. Ist $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch die Matrix 5/1/1

$$A := \mathrm{M}(\varphi) = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

gegeben, so können wir eine Basis $\mathcal{B} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ finden, für die $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ diagonal ist; wir leiten wir zunächst notwendige Bedingungen her: Ist

Die nebenstehenden Beispiele dienen nur der Motivation, für das formale Verständnis werden sie später nicht erforderlich sein.

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix, dann sind nach Definition der Matrix eines Homomorphismus $(\lambda_1, 0)$ und $(0, \lambda_2)$ die Koordinaten von $\varphi(\boldsymbol{v}_1)$ bzw. $\varphi(\boldsymbol{v}_2)$ bezüglich $\mathcal{B}$, daher $\varphi(\boldsymbol{v}_1) = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1$ und $\varphi(\boldsymbol{v}_2) = \lambda_2 \boldsymbol{v}_2$. Diese Bedingungen lassen sich durch lineare Gleichungssysteme ausdrücken; ist $\boldsymbol{v} = (x_1, x_2)$ einer der Vektoren $\boldsymbol{v}_i$ und λ die entsprechende Zahl λ_i, so folgt

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Das System ist offenbar äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} -1-\lambda & -3 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Die Zahlen λ mit der angegebenen Eigenschaft werden später *Eigenwerte* genannt.

und da für $\boldsymbol{v}$ als Basisvektor der Nullvektor nicht infrage kommt, muss eine nichttriviale Lösung existieren, insbesondere also für die Koeffizientenmatrix die Bedingung

$$0 = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & -3 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

erfüllt sein. Die einzigen Zahlen λ, für die das zutrifft, sind (bis auf Reihenfolge) $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$. Durch Einsetzen erhalten wir zwei homogene lineare Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ihre Lösungsräume werden von den Vektoren $\boldsymbol{v}_1 = (3, -2)$ im ersten bzw. $\boldsymbol{v}_2 = (-1, 1)$ im zweiten Fall erzeugt, wobei gemäß unserer Rechnung $\varphi(\boldsymbol{v}_i) = \lambda_i \boldsymbol{v}_i$ gilt. Offensichtlich liegt ein linear unabhängiges System $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ vor, daher eine Basis des Standardraumes $\mathbb{R}^2$, bezüglich der φ die Matrix

$$\mathrm{M}_{(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

besitzt. A ist folglich einer Diagonalmatrix ähnlich; genauer ergibt sich aus den Transformationsformeln für den Basiswechsel

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = U^{-1} \cdot A \cdot U \quad \text{mit} \quad U = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aus der Rechnung wird bereits plausibel, dass so nicht immer vorgegangen werden kann. Wählen wir z.B. anstelle von A die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} -5 & -13 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},$$

dann ergibt sich als notwendige Bedingung für die Diagonaleinträge λ einer zu B ähnlichen Matrix die Gleichung

$$0 = \det \begin{pmatrix} -5-\lambda & -13 \\ 2 & 5-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1,$$

die für keine reelle Zahl λ erfüllt ist.

Im letzteren Beispiel könnten wir uns noch durch Erweiterung des Grundkörpers helfen und die Ähnlichkeitsklasse in $\mathrm{M}(2;\mathbb{C})$ untersuchen, was zu einem analogen Resultat führt. Wird jedoch

Im Gegensatz zu den vorigen Fällen, in denen *Diagonalisierbarkeit* vorliegt, kann dieses Beispiel erst im Rahmen der *jordanschen Normalform* umfassend interpretiert werden.

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

gewählt, so erhalten wir die entsprechende Bedingung

$$0 = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & -4 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2,$$

die nur für die Zahl $\lambda = 1$ erfüllt ist. Wäre aber C zur Matrix $\mathrm{diag}(\lambda, \lambda) = \mathrm{E}_2$ ähnlich, so müsste für eine geeignete reguläre Matrix U die Bedingung $\mathrm{E}_2 = U^{-1} \cdot C \cdot U$ zutreffen, woraus sich sofort $\mathrm{E}_2 = C$ entnehmen lässt, ↯.

Die systematische Untersuchung orientiert sich an den behandelten Spezialfällen. Auch im zuletzt angegebenen Beispiel wurden Diagonaleinträge einer Matrix gefunden, die „in der Ähnlichkeitsklasse der Matrix liegen könnte, falls darin überhaupt eine Diagonalmatrix vorkommt;“ eine Präzisierung liefert die später studierte *jordansche Normalform*.

Definition. (*Eigenwerte und Eigenvektoren*) 5/1/2

$\varphi : V \to V$ sei ein Endomorphismus des Vektorraumes V.

(1) Eine Zahl $\lambda \in K$ heißt *Eigenwert* von φ, falls ein Vektor $\boldsymbol{v} \in V \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ existiert, für den $\varphi(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}$ ist.

(2) Jeder Vektor $\boldsymbol{v} \in V \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ mit der Eigenschaft (1) heißt *Eigenvektor* zum Eigenwert λ.

(3) Ist $A \in \mathrm{M}(n; K)$ eine Matrix, so heißen die Eigenwerte des durch Matrizenmultiplikation mit A definierten Endomorphismus $\varphi : K^n \to K^n$ auch *Eigenwerte der Matrix* A; entsprechend werden die Eigenvektoren von φ als *Eigenvektoren der Matrix* A bezeichnet.

Die Klassifikation von Endomorphismen bzw. die Ähnlichkeitsklassifikation quadratischer Matrizen beruhen auf der Untersuchung von Eigenwerten und Eigenvektoren.

Warnung. Beachten Sie, dass gemäß dieser Definition die Zahl $0 \in K$ zwar als Eigenwert infrage kommt, der Nullvektor $\boldsymbol{0} \in V$ jedoch niemals Eigenvektor sein kann.

Bemerkung. 5/1/3

Für eine quadratische Matrix $A \in \mathrm{M}(n; K)$ sind die Eigenräume Unterräume des Standardraumes $\mathbb{R}^n$.

(1) $\lambda \in K$ ist genau dann ein Eigenwert zu $\varphi : V \to V$, wenn

$$V_{\varphi,\lambda} := \ker(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V) \neq \mathbf{0}.$$

Dies folgt, da offenbar

$$(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0} \iff \varphi(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}.$$

Der Unterraum $V_{\varphi,\lambda}$ von V heißt in diesem Fall *Eigenraum* zum Eigenwert λ. Der Begriff wird in Analogie zur vorigen Definition auch für quadratische Matrizen verwendet. Eigenräume von A sind dann die Lösungsmengen der homogenen linearen Gleichungssysteme mit der Koeffizientenmatrix $A - \lambda \cdot \mathrm{E}_n$.
Besteht kein Zweifel über den betrachteten Homomorphismus φ, so schreiben wir künftig V_λ anstelle von $V_{\varphi,\lambda}$.

(2) Der Eigenraum V_λ besteht aus dem Nullvektor und allen Eigenvektoren zum Eigenwert λ.

Beispiele.

(1) Die identische Abbildung id_V besitzt als einzigen Eigenwert die Zahl $1 \in K$; zugehöriger Eigenraum ist $V_1 = V$.

(2) Die Nullabbildung $\mathbf{0}_V : V \to V$ besitzt als einzigen Eigenwert die Zahl $0 \in K$; Eigenraum ist $V_0 = V$.

(3) Die anfangs ausgeführten Rechnungen für verschiedene 2×2-Matrizen (vgl. 5/1/1) lassen sich mit der soeben eingeführten Terminologie folgendermaßen ausdrücken: Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

besitzt die Eigenwerte 1 und 2. Eigenvektoren zum Eigenwert 1 sind die von $\mathbf{0}$ verschiedenen Vielfachen des Vektors $(3, -2)$, zum Eigenwert 2 die von $\mathbf{0}$ verschiedenen Vielfachen des Vektors $(-1, 1)$.
Dagegen besitzt die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} -5 & -13 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2; \mathbb{R})$$

keine Eigenwerte. Diese Eigenschaft ändert sich beim Übergang zum Grundkörper $\mathbb{C}$.

(4) Ist $\varphi : K^n \to K^n$ der Endomorphismus des Standardraumes K^n mit der Diagonalmatrix $\mathrm{M}(\varphi) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, so ist $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ die Menge der Eigenwerte zu φ, und die Eigenräume werden durch die entsprechenden Vektoren $\boldsymbol{e}_i$ der kanonischen Basis erzeugt (ggf. von mehreren, falls einige der λ_i übereinstimmen). Insbesondere erhalten wir erneut (1) und (2).

In den Beispielen wurde die Lösbarkeit gewisser Gleichungen als notwendige Bedingung dafür erkannt, dass eine Diagonalmatrix in einer Ähnlichkeitsklasse liegt. Die Bestimmung der Eigenwerte wird so unser erstes Anliegen.

Satz. (*charakteristische Gleichung*) 5/1/4

$\lambda \in K$ ist genau dann Eigenwert des Endomorphismus $\varphi : V \to V$, wenn

$$\det(\lambda \cdot \mathrm{id}_V - \varphi) = 0.$$

Beweis. λ ist genau dann ein Eigenwert, wenn ein Vektor $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ existiert, für den $\varphi(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}$ gilt. Diese Bedingung ist wiederum äquivalent zu

$$(\lambda \cdot \mathrm{id}_V - \varphi)(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}.$$

Der Kern des Endomorphismus

$$\lambda \cdot \mathrm{id}_V - \varphi : V \to V$$

Vgl. 4/2/23.

ist jedoch genau dann von $\mathbf{0}$ verschieden, wenn $\det(\lambda \cdot \mathrm{id}_V - \varphi) = 0$ ist. ❏

Ist $\lambda \in K$ und $\mathcal{B}$ eine Basis für V, so ergibt sich mit $A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$

$$\det(\lambda \cdot \mathrm{E}_n - A) = \det(\lambda \cdot \mathrm{id}_V - \varphi),$$

diese Zahl hängt insbesondere nicht von der Wahl der Basis $\mathcal{B}$ ab.

Definition. Für $A \in M(n;K)$ heißt $X \cdot \mathrm{E}_n - A \in M(n;K[X])$ *charakteristische Matrix* und $\chi_A := \det(X \cdot \mathrm{E}_n - A)$ *charakteristisches Polynom* der Matrix A. 5/1/5

Die leibnizsche Formel 4/2/5 (1) zeigt, dass χ_A eine Vielfachensumme von Potenzen $1 = X^0, X^1, \ldots, X^n$ ist, in der X^n mit dem Faktor 1 auftritt:

$$\det(X \cdot \mathrm{E}_n - A) = (X - a_{11}) \cdot \ldots \cdot (X - a_{nn}) + \text{ Produkte mit weniger als } n \text{ Diagonaleinträgen.}$$

Daher ist χ_A ein normiertes Polynom vom Grad $n = \dim(V)$.

Ist nun beispielsweise K ein unendlicher Körper, $\varphi : V \to V$ eine K-lineare Abbildung, so wird durch

$$K \to K, \quad \lambda \mapsto \det(\lambda \cdot \mathrm{id}_V - \varphi)$$

auf eindeutige Weise ein normiertes Polynom vom Grad n beschrieben, das beim Einsetzen von Zahlen $\lambda \in K$ diese Werte annimmt (Identitätssatz für Polynome). Wollen wir ein solches Polynom allgemein definieren, so ist sorgfältig vorzugehen.

Über einem unendlichen Körper ist damit das *charakteristische Polynom* definiert; der allgemeine Fall wird anschließend erläutert.

Bemerkung – Definition. (*charakteristisches Polynom*) 5/1/6

Ist $A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ die Matrix des Endomorphismus $\varphi : V \to V$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$, so ist durch

$$\chi_\varphi := \det(X \cdot \mathrm{E}_n - A) \in K[X]$$

ein normiertes Polynom über K definiert, das nicht von der Wahl der Basis $\mathcal{B}$ abhängt. Es heißt *charakteristisches Polynom* von φ, und

$$\chi_\varphi(\lambda) = \det(\lambda \cdot \mathrm{id}_V - \varphi) \quad \text{für } \lambda \in K.$$

An dieser Stelle müssen wir uns daran erinnern, dass die wichtigsten Rechenregeln für Determinanten über beliebigen kommutativen Ringen bewiesen wurden (vgl. 4/2/28). Darauf basiert die folgende

Rechtfertigung. Ist $\mathcal{B}'$ eine weitere Basis für V und $A' = \mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$, so gilt nach der Formel für den Basiswechsel $A' = U^{-1} \cdot A \cdot U$ mit einer geeigneten regulären Matrix $U \in \mathrm{GL}(n;K)$. Nach dem Multiplikationssatz für Determinanten folgt in $\mathrm{M}(n;K[X])$

$$\begin{aligned}
\det(X \cdot \mathrm{E}_n - A') &= \det(X \cdot \mathrm{E}_n - U^{-1} \cdot A \cdot U) \\
&= \det(U^{-1} \cdot (X \cdot \mathrm{E}_n - A) \cdot U) \\
&= \det(U^{-1}) \cdot \det(X \cdot \mathrm{E}_n - A) \cdot \det(U) \\
&= \det(U^{-1}) \cdot \det(U) \cdot \det(X \cdot \mathrm{E}_n - A) \\
&= \det(X \cdot \mathrm{E}_n - A). \qquad ❏
\end{aligned}$$

Satz 5/1/4 kann nun folgendermaßen formuliert werden: 5/1/7
Eigenwerte eines Endomorphismus $\varphi : V \to V$ sind die Nullstellen des Polynoms χ_φ im Grundkörper K.

Wie wir sehen, sind die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms einer Matrix Invarianten ihrer Ähnlichkeitsklasse. Insbesondere erhalten wir für $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n;K)$ aus

$$\chi_A = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0,$$

durch Koeffizientenvergleich

$$a_0 = \chi_A(0) = (-1)^n \cdot \det(A),$$
$$a_{n-1} = -(a_{11} + \ldots + a_{nn}) = -\mathrm{tr}(A).$$

Dadurch lässt sich z.B. für $n = 2$ das charakteristische Polynom einer gegebenen Matrix leicht aufschreiben.

Eine weitere – fast offensichtliche – Eigenschaft des charakteristischen Polynoms ergibt sich aus der Formel für die Determinante einer Blockmatrix.

Bemerkung. Sind $\varphi : V \to V$ und $\psi : W \to W$ Endomorphismen endlichdimensionaler K-Vektorräume, so hat die direkte Summe 5/1/8

$$\varphi \oplus \psi : V \oplus W \to V \oplus W$$

das charakteristische Polynom

$$\chi_{\varphi\oplus\psi} = \chi_\varphi \cdot \chi_\psi.$$

Es ergibt sich, dass jedes normierte Polynom als charakteristisches Polynom auftreten kann. 5/1/9

Bemerkung – Bezeichnung. Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ -a_{n-3} & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(n; K)$$

Die Begleitmatrix eines Polynoms ist mehr als nur irgendein Beispiel, wir sehen das später im Zusammenhang mit der Elementarteilertheorie.

hat das charakteristisches Polynom

$$f = \chi_A = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + a_{n-3}X^{n-3} + \ldots + a_0$$

(das kann beispielsweise durch Entwicklung von $X \cdot \mathrm{E}_n - A$ nach der ersten Spalte überprüft werden). A heißt *Begleitmatrix* des Polynoms f und wird mit $\mathrm{B}(f)$ bezeichnet. Ausdrücklich wird der Fall $n = 1$, $f = X + a_0$ mit $\mathrm{B}(f) = (-a_0)$ zugelassen.

Schwerpunkte zum gewählten Stoff

- Eigenwerte und Eigenvektoren eines Endomorphismus [5/1/2]
- Eigenräume eines Endomorphismus [5/1/3]
- Charakteristische Gleichung und charakteristisches Polynom; Bestimmung von Eigenwerten und Eigenräumen [5/1/4 – 5/1/7]
- Charakteristische Polynome direkter Summen von Endomorphismen [5/1/8]
- Begleitmatrix eines normierten Polynoms [5/1/9]

Sachverzeichnis

Symbole
V_λ [6/2/3], 3
χ_A [5/1/5], 4
χ_φ [5/1/6], 4
$\mathrm{B}(f)$ [5/1/9], 5

B
Begleitmatrix [5/1/9], 5

C
charakteristische
– Gleichung [5/1/4], 3
– Matrix [5/1/5], 4
charakteristisches Polynom
– einer direkten Summe [5/1/8], 5
– einer Matrix [5/1/5], 4
– eines Endomorphismus [5/1/6], 4

E

Eigenraum einer Matrix bzw. eines Endomorphismus [6/2/3], 3
Eigenvektor
– einer Matrix [5/1/2] [5/1/2], 2
– eines Endomorphismus [5/1/2], 2
Eigenwert
– einer Matrix [5/1/2] [5/1/2], 2
– eines Endomorphismus [5/1/2], 2