Kapitel 5

Endomorphismen von Vektorräumen

$V \neq \mathbf{0}$ sei ein Vektorraum über dem Körper K und $n = \dim_K(V) < \infty$. Die Endomorphismen $\varphi : V \to V$ werden bezüglich einer Basis $\mathcal{B}$ von V durch die zugeordnete Matrix $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ beschrieben; variiert $\mathcal{B}$, so entstehen (im Allgemeinen) unterschiedliche Matrizen. Die Fragestellung nach einer Normalform trat implizit schon im 18. Jahrhundert auf. Sie wurde in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts durch C. Jordan (zunächst über den Körpern $\mathbb{F}_p$, dann über $\mathbb{C}$) behandelt und später durch M. Hamburger in geschlossener Form dargestellt. Ein wichtiges Motiv war die Untersuchung linearer Differenzialgleichungen.

Dieses Kapitel gibt eine Einführung in die Klassifikation der Endomorphismen eines Vektorraumes. Die Aufgabenstellung ist äquivalent zum Auffinden eines Systems von Normalformen der hier als Ähnlichkeit bezeichneten Äquivalenzrelation $\approx$ auf der Menge $\mathrm{M}(n; K)$ quadratischer Matrizen über K. Es ist nahe liegend, nach „möglichst einfachen“ Repräsentanten der Klassen zu suchen.

5.4 Die jordansche Normalform

Elementarteiler* 5/4/14

Nachdem die Klassifikation der Endomorphismen eines Vektorraumes (zumindest über einem „hinreichend großen“ Körper) prinzipiell erhalten wurde, stellt sich die Frage nach der praktischen Ausführung. Wie wir gesehen haben, ist das im Fall nilpotenter Endomorphismen stets möglich, während im Allgemeinen die Bestimmung der Eigenwerte Schwierigkeiten bereiten kann. Tatsächlich sind für Dimensionen > 4 die Nullstellen des charakteristischen Polynoms nicht immer Wurzelausdrücke der Koeffizienten einer gegebenen Matrix aus $\mathrm{M}(n;\mathbb{C})$. In den Anwendungen der Mathematik bieten sich zwar Näherungslösungen an, jedoch wissen wir bereits, dass Rundungsfehler ein Resultat unbrauchbar machen können; so kann sich im Fall nahe beieinander liegender Eigenwerte unter Umständen sogar ein qualitativ falsches Resultat (Auftreten anderer Jordanblöcke) bei der Bestimmung der Normalform ergeben.

Der Beweis dieser Eigenschaft erfordert tiefere Sätze aus der hier nicht behandelten Galoistheorie.

Hier lernen wir ein Invariantensystem kennen, mit dem sich konstruktiv entscheiden lässt, ob die jordanschen Normalformen zweier Matrizen übereinstimmen. Die Rechnung beruht auf der Bestimmung von Determinanten und dem euklidischen Algorithmus, führt also auch ohne Näherungen zum Ziel. Weiter ergibt sich eine Ähnlichkeitsklassifikation der Matrizen über einem beliebigen Grundkörper.

Die Theorie der Elementarteiler geht auf Sylvester, Smith und Weierstrass zurück.

Wir beginnen mit technischen Vorbereitungen. Ist $M \in \mathrm{M}(n; K[X])$ eine Matrix, so bezeichnet $\mathrm{ggT}(M)$ den größten gemeinsamen Teiler aller Einträge von M im Polynomring $K[X]$.

Lemma. *Ist* $B \in \mathrm{M}(n; K[X])$ *und* $\det(B) \in K^*$, *so gilt für* $0 \leq k \leq n$

$$\mathrm{ggT}\big(\Lambda^k(M)\big) = \mathrm{ggT}\big(\Lambda^k(M\cdot B)\big) = \mathrm{ggT}\big(\Lambda^k(B\cdot M)\big).$$

Beweis. Nach der Formel 4/2/28 (2) für die adjungierte Matrix existiert eine – wieder mit dem Symbol B^{-1} bezeichnete – Matrix aus $\mathrm{M}(n;K[X])$, die die Eigenschaft $B^{-1}\cdot B = B\cdot B^{-1} = \mathrm{E}_n$ besitzt.

Die äußere Potenz $\Lambda^k(M)$ einer Matrix M ist in 4/5/14 definiert.

Wegen der Funktorialität der äußeren Potenz (vgl. 4/5/17) ist $\Lambda^k(M\cdot B) = \Lambda^k(M)\cdot \Lambda^k(B)$, daher jeder Eintrag der Matrix $\Lambda^k(M\cdot B)$ Vielfachensumme der Einträge von $\Lambda^k(M)$, d.h. $\mathrm{ggT}\big(\Lambda^k(M)\big) \mid \mathrm{ggT}\big(\Lambda^k(M\cdot B)\big)$.
Umgekehrt ist $\Lambda^k(M) = \Lambda^k(M\cdot B\cdot B^{-1}) = \Lambda^k(M\cdot B)\cdot\Lambda^k(B^{-1})$, daher jeder Eintrag von $\Lambda^k(M)$ Vielfachensumme der Einträge der Matrix $\Lambda^k(M\cdot B)$. Wir erhalten $\mathrm{ggT}\big(\Lambda^k(M\cdot B)\big) \mid \mathrm{ggT}\big(\Lambda^k(M)\big)$ und weiter $\mathrm{ggT}\big(\Lambda^k(M\cdot B)\big) = \mathrm{ggT}\big(\Lambda^k(M)\big)$.
Die zweite der behaupteten Gleichheiten folgt entsprechend. ❏

Zeilen- bzw. Spaltenoperationen einer Matrix lassen sich als Multiplikation mit geeigneten Elementarmatrizen interpretieren (Bemerkung 2/3/11 (3)). Das lässt sich nach dem Lemma sinngemäß auch auf *polynomiale* Matrizen (d.h. auf Matrizen über dem Polynomring) übertragen. 5/4/15

Dafür sind jedenfalls solche Matrizenoperationen zulässig, für die die Determinante der entsprechenden Elementarmatrix aus $K \setminus \{\mathbf{0}\}$ ist.

Bemerkung – Definition. (*Präsentationsmatrix*)

Ist $M \in \mathrm{M}(n;K[X])$, so ändern sich die Polynome $\mathrm{ggT}(\Lambda^k(M))$ nicht, wenn M durch eine Matrix ersetzt wird, die aus M mittels einer der folgenden Transformationen entsteht.

(1) Vertauschen zweier Zeilen (bzw. Spalten) von M.

(2) Multiplikation einer Zeile (bzw. Spalte) von M mit einer Zahl $a \in K^*$.

(3) Addition des f-fachen einer Zeile (Spalte) von M zu einer anderen, wobei $f \in K[X]$ ein Polynom ist.

Zwei polynomiale Matrizen $M, M' \in \mathrm{M}(n;K[X])$ heißen *äquivalent*, falls sie durch eine Folge von Transformationen der angegebenen Typen ineinander überführt werden können.

Sie können leicht prüfen, dass damit eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{M}(n;K)$ definiert ist.

Ist $A \in M(n;K)$, so heißt jede Matrix $M \in \mathrm{M}(n;K[X])$, die zur charakteristischen Matrix $X\cdot\mathrm{E}_n - A$ äquivalent ist, eine *Präsentationsmatrix für* A. Ist $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$, so wird jede Präsentationsmatrix für $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ ($\mathcal{B}$ durchläuft die Basen von V) als *Präsentationsmatrix des Endomorphismus* φ bezeichnet.

Beispiel. Für $f \in K[X]$ und

$$M = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 1 & f \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2;K[X])$$

ergeben sich durch Addition des $(-f)$-fachen der zweiten Zeile zur ersten usw. die äquivalenten Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & -f^2 \\ 1 & f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -f^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & f^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f^2 \end{pmatrix}.$$

Damit ist für $m = 2$ auch die folgende, später verwendete Eigenschaft bewiesen: *Ist M Präsentationsmatrix eines elementaren Jordanblocks* $\mathrm{J}(m,\lambda)$, *so ist diese äquivalent zur Diagonalmatrix* $\mathrm{diag}(1,\dots,1,(X-\lambda)^m)$.

… der Fall $f = X - \lambda$.

Nun sei $A \in \mathrm{M}(n;K)$ sowie $U \in \mathrm{GL}(n;K)$ und $B = U^{-1}\cdot A\cdot U$. Dann ergibt sich für die charakteristischen Matrizen 5/4/16

$$X\cdot\mathrm{E}_n - B = X\cdot\mathrm{E}_n - U^{-1}\cdot A\cdot U = U^{-1}\cdot(X\cdot\mathrm{E}_n - A)\cdot U.$$

Bemerkung. $A, B \in \mathrm{M}(n;K)$ bezeichnen ähnliche Matrizen.

(1) Die Präsentationsmatrizen von A und B sind zueinander äquivalent.

(2) $\mathrm{ggT}\big(\Lambda^k(X\cdot\mathrm{E}_n - B)\big) = \mathrm{ggT}\big(\Lambda^k(X\cdot\mathrm{E}_n - A)\big)$.

Beweis. (1) ergibt sich nach der zuvor ausgeführten Rechnung für die charakteristischen Matrizen: U und U^{-1} sind Produkte von Elementarmatrizen (2/3/13), sie bewirken daher bei Multiplikation mit der charakteristischen Matrix eine Folge von Zeilen- bzw. Spaltenoperationen. (2) ist dann aus dem zuvor in 5/4/14 bewiesenen Lemma abzulesen. ❑

Die Bemerkung rechtfertigt insbesondere folgende

Definition. (*Determinantenteiler*)

Nach Definition von Λ^0 ist stets $\mathrm{d}_0(A) = 1$.

Ist $A \in \mathrm{M}(n;K)$, so heißt

$$\mathrm{d}_k(A) := \mathrm{ggT}\big(\Lambda^k(X\cdot \mathrm{E}_n - A)\big) \in K[X], \quad 0 \le k \le n$$

der *k-te Determinantenteiler der Matrix A.*

Entsprechend heißt für $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$

$$\mathrm{d}_k(\varphi) := \mathrm{d}_k\big(\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)\big), \quad 0 \le k \le n$$

der *k-te Determinantenteiler des Endomorphismus φ*, wenn $\mathcal{B}$ eine beliebige Basis von V bezeichnet.

Determinantenteiler verallgemeinern den Begriff des charakteristischen Polynoms, denn $\chi_\varphi = \mathrm{d}_n(\varphi)$.

Bemerkung. Für jeden Endomorphismus $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ gilt 5/4/17

$$\mathrm{d}_{k-1}(\varphi) \,|\, \mathrm{d}_k(\varphi), \quad k = 1, \ldots n,$$

denn für $A \in \mathrm{M}(n;K)$ sind nach dem laplaceschen Entwicklungssatz (vgl. 4/2/28 (3)) die Einträge von $\Lambda^k(X\cdot \mathrm{E}_n - A)$ Vielfachensummen der Einträge der Matrix $\Lambda^{k-1}(X\cdot \mathrm{E}_n - A)$.

Aus $\mathrm{d}_n(\varphi) = \chi_\varphi$ folgt insbesondere $\mathrm{d}_k(\varphi) \neq 0$, $0 \le k \le n$.

Definition. (*Elementarteiler*) 5/4/18

Die Polynome

Dies ist nur eine alternative Beschreibung des zuvor angegebenen Invariantensystems.

$$\mathrm{e}_k(\varphi) := \frac{\mathrm{d}_k(\varphi)}{\mathrm{d}_{k-1}(\varphi)} \in K[X], \quad k = 1, \ldots n$$

heißen *Elementarteiler*, auch *invariante Teiler* oder *invariante Faktoren* des Endomorphismus $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$. Entsprechend werden die Polynome

$$\mathrm{e}_k(A) := \frac{\mathrm{d}_k(A)}{\mathrm{d}_{k-1}(A)} \in K[X], \quad k = 1, \ldots n$$

Elementarteiler, (auch *invariante Teiler*) der Matrix $A \in \mathrm{M}(n;K)$ genannt.

Bemerkung. Wegen $\mathrm{d}_0(\varphi) = 1$ bestimmen sich Elementarteiler und invariante Teiler gegenseitig, und offensichtlich gilt 5/4/19

(1) $$\mathrm{e}_1(\varphi)\cdot \ldots \cdot \mathrm{e}_k(\varphi) = \mathrm{d}_k(\varphi), \quad 1 \le k \le n,$$

daher insbesondere

(2) $$\mathrm{e}_n(\varphi) = \mathrm{d}_n(\varphi) \iff \mathrm{e}_1(\varphi) = \ldots = \mathrm{e}_{n-1}(\varphi) = 1.$$

… denn aus $\mathrm{e}_1(\varphi)\cdot \ldots \cdot \mathrm{e}_{n-1}(\varphi) = 1$ folgt $\mathrm{e}_1(\varphi) = \ldots = \mathrm{e}_{n-1}(\varphi) = 1$.

Die von 1 verschiedenen Elementarteiler werden gelegentlich als *nichttriviale Elementarteiler* bezeichnet. Die Bemerkung besagt, dass $\mathrm{e}_n(\varphi) = \mathrm{d}_n(\varphi)$ dazu äquivalent ist, dass φ genau einen nichttrivialen Elementarteiler besitzt.

Lemma. 5/4/20

(1) *Sind $f, g \in K[X]$ Polynome und $\mathrm{ggT}(f,g) = 1$, so ist die polynomiale Matrix $\mathrm{diag}(f,g) \in \mathrm{M}(2;K[X])$ zu $\mathrm{diag}(1,fg)$ äquivalent.*

Ähnlich wie eine quadratische Matrix über dem Grundkörper K durch Zeilen- und Spaltentransformationen in Diagonalgestalt überführt werden kann, geschieht dies nach 5/4/15 für ihre charakteristische Matrix über $K[X]$. Wir sehen das hier zunächst für den Fall, dass eine jordansche Normalform existiert.

(2) *Wird die Jordanform einer Matrix durch das Tupel* $(\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ *der paarweise verschiedenen Eigenwerte und die entsprechende Segre-Charakteristik* $[(m_{11}, \dots, m_{1r_1}) \dots (m_{s1}, \dots, m_{sr_s})]$ *gegeben, so ist ihre Präsentationsmatrix zur Diagonalmatrix*

$$\operatorname{diag}\Big(\prod_{i=1}^{s}(X-\lambda_i)^{m_{in}}, \prod_{i=1}^{s}(X-\lambda_i)^{m_{i\,n-1}}, \dots, \prod_{i=1}^{s}(X-\lambda_i)^{m_{i1}}\Big)$$

äquivalent (*mit* $m_{ij} := 0$ *für* $j > r_i$).

Beweis. Zum Beweis von (1) erinnern wir zunächst daran, dass der größte gemeinsame Teiler von f und g Vielfachensumme dieser Polynome ist, d.h. es existieren $p, q \in K[X]$, für die $pf + qg = 1$ gilt. Durch Zeilen- und Spaltenoperationen ergeben sich leicht die äquivalenten Matrizen

$$\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f & 0 \\ pf & g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f & 0 \\ pf+qg & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 1 & g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f & -gf \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & fg \end{pmatrix}.$$

Zum Beweis des zweiten Teils der Behauptung wählen wir eine Jordanform der gegebenen Matrix. Ihre charakteristische Matrix wird äquivalent umgeformt, indem zunächst die den elementaren Jordanblöcken entsprechenden Blöcke durch $\operatorname{diag}(1, \dots, 1, (X-\lambda_i)^{m_{ij}})$ ersetzt werden (vgl. 5/4/15). Der gesamte Block zum Eigenwert λ_i ist zu einer Diagonalmatrix äquivalent, die in der Diagonale die Potenzen $(X-\lambda_i)^{m_{ij}}$ mit $j \le r_i$ (und darüber hinaus Einsen) als Diagonaleinträge enthält. Nun werden noch die Diagonaleinträge permutiert, und auf die paarweise teilerfremden Potenzen von $(X-\lambda_i)$ und $(X-\lambda_j)$ mit $i \neq j$ wird (1) angewendet. ❑

Satz. *Die jordansche Normalform eines Endomorphismus* $\varphi : V \to V$ *ist durch seine Determinantenteiler* $\big(\mathrm{d}_1(\varphi), \dots, \mathrm{d}_n(\varphi)\big)$ *bzw. seine Elementarteiler* $\big(\mathrm{e}_1(\varphi), \dots, \mathrm{e}_n(\varphi)\big)$ *eindeutig bestimmt.* 5/4/21

(1) *Sind* $(\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ *die paarweise verschiedenen Eigenwerte von* φ *und bezeichnet entsprechend*

$$[(m_{11}, \dots, m_{1r_1}) \dots (m_{s1}, \dots, m_{sr_s})]$$

die Segre-Charakteristik, so ergeben sich (*mit* $m_{ij} = 0$ *für* $j > r_i$)

$$\mathrm{e}_{n-k}(\varphi) = \prod_{i=1}^{s}(X-\lambda_i)^{m_{i\,k+1}}, \quad 0 \le k < n$$

als Elementarteiler des Endomorphismus φ. *Insbesondere erhalten wir für* $k = 0$ *das Minimalpolynom* $\mathrm{m}_\varphi = \mathrm{e}_n(\varphi)$.

(2) φ *besitzt eine Präsentationsmatrix* $\operatorname{diag}(f_1, \dots, f_n)$ *mit normierten Polynomen* $f_i \in K[X]$. *Diese können so gewählt werden, dass die Teilbarkeitsbedingungen* $f_1 \,|\, f_2 \,|\, \dots \,|\, f_n$ *erfüllt sind.*
In diesem Fall ist $f_i = \mathrm{e}_i(\varphi)$ *für* $i = 1, \dots, n$, *d.h. die Matrix*

$$\operatorname{diag}(f_1, \dots, f_n) = \operatorname{diag}(\mathrm{e}_1(\varphi), \dots, \mathrm{e}_n(\varphi)) \in \mathrm{M}(n; K[X])$$

ist unter den Präsentationsmatrizen des Endomorphismus φ *eindeutig bestimmt; sie wird auch als smithsche Normalform bezeichnet.*

Beweis. Aus dem Lemma folgt durch Berechnung der Unterdeterminanten

$$\mathrm{d}_{n-k}(\varphi) = \prod_{i=1}^{s}\prod_{j, j>k}(X-\lambda_i)^{m_{ij}}, \quad 0 \le k < n.$$

Betrachten Sie die Unterdeterminanten, die aus Teilen der Diagonale der Matrix in 6/4/20 (2) gebildet werden.

Quotientenbildung ergibt die behauptete Formel für die Elementarteiler e_i. Die Eindeutigkeitsaussage ist nun offensichtlich. ❑

Da nach Erweiterung des Grundkörpers stets eine jordansche Normalform existiert, erhalten wir das Minimalpolynom auch ohne diese Voraussetzung als $\mathrm{m}_\varphi = \mathrm{e}_n(\varphi)$.

Unmittelbar einzusehen ist nun auch folgende Eigenschaft der Elementarteiler, die die vertraute Teilbarkeit des charakteristischen Polynoms durch das Minimalpolynom verallgemeinert.

Korollar. Für einen Endomorphismus $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ gelten die Teilbarkeitsbeziehungen $\mathrm{e}_1(\varphi) \,|\, \mathrm{e}_2(\varphi) \,|\, \ldots \,|\, \mathrm{e}_{n-1}(\varphi) \,|\, \mathrm{e}_n(\varphi)$. 5/4/22

Korollar. *Ist n die Dimension von V, so gilt* 5/4/23

$$\mathrm{m}_\varphi \,|\, \chi_\varphi \,|\, \mathrm{m}_\varphi^n,$$

daher besitzen Minimalpolynom und charakteristisches Polynom eines Endomorphismus dieselben irreduziblen Teiler.

Achtung: Die Multiplizitäten sind im Allgemeinen verschieden!

Beweis. Wir haben zu zeigen, dass $\chi_\varphi = \mathrm{d}_n(\varphi)$ Teiler von $\mathrm{e}_n(\varphi)^n$ ist. Dies folgt aus $\mathrm{e}_1(\varphi) \cdot \ldots \cdot \mathrm{e}_n(\varphi) = \mathrm{d}_n(\varphi)$ (vgl. 5/4/19 (1)) und $\mathrm{e}_i(\varphi) \,|\, \mathrm{e}_n(\varphi)$, $i = 1, \ldots, n$. ❑

Zerfällt χ_φ in ein Produkt von Linearfaktoren, so existiert eine jordansche Normalform; sie lässt sich dann aus den Elementarteilern ablesen.
Besitzen zwei Matrizen dieselben Elementarteiler, so sind sie zunächst über jedem Erweiterungskörper ähnlich, der alle Nullstellen der charakteristischen Polynome enthält. Im Falle $K = \mathbb{C}$ bedeutet das bereits Ähnlichkeit. Tatsächlich folgt Ähnlichkeit von Matrizen mit denselben Elementarteilern ganz allgemein, ist jedoch schwieriger zu beweisen.

Ist die Faktorzerlegung für $\chi_A = \chi_B$ nicht explizit ausführbar, so kann anhand der Elementarteiler der Matrizen A, B entschieden werden, ob sie über einem Erweiterungskörper dieselbe jordansche Normalform besitzen.

Wir wenden uns zunächst der praktischen Bestimmung von Elementarteilern zu. Zur Vereinfachung der Bezeichnungen werden im dargestellten Algorithmus den Einträgen f_{ij} der Präsentationsmatrix nach Ausführung äquivalenter Umformungen jeweils neue Werte zugewiesen (wie z.B. in Computerprogrammen).

Rechenverfahren. (*Bestimmung der smithschen Normalform*) 5/4/24

Ist $M = (f_{ij}) \in \mathrm{M}(n; K[X])$ Präsentationsmatrix eines Endomorphismus $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$, so kann diese durch Zeilen- und Spaltentransformationen gemäß 5/4/15 folgendermaßen in eine Diagonalmatrix $\mathrm{diag}(e_1, \ldots, e_n) \in \mathrm{M}(n; K[X])$ mit normierten Polynomen e_i und $e_1 \,|\, e_2 \,|\, \ldots \,|\, e_n$ überführt werden.

Wir erhalten hier eine Methode zur Bestimmung der Elementarteiler, die das mühsame Auffinden des größten gemeinsamen Teilers der Einträge aller äußeren Potenzen erleichtert.

(0) *Nach Permutation von Zeilen und Spalten der Matrix M ist o.B.d.A. f_{11} von minimalem Grad unter den von 0 verschiedenen Einträgen.*

(1) *Nach Subtraktion geeigneter Vielfacher der ersten Zeile von den übrigen steht an jeder Position $(i, 1)$ mit $i > 1$ der Rest von f_{i1} bei Division durch f_{11}, folglich ist o.B.d.A. $\deg(f_{i1}) < \deg(f_{11})$ für $i > 1$.*

Division mit Rest ...

(2) *Entsprechend* (1) *kann durch Spaltenoperationen $\deg(f_{1j}) < \deg(f_{11})$ für $j > 1$ erreicht werden.*

(3) *Enthält die Matrix nun einen nicht verschwindenden Eintrag kleineren Grades als $\deg(f_{11})$, so wird erneut wie unter* (0), (1), (2) *vorgegangen. Dies kann nur endlich oft wiederholt werden, und es ergibt sich eine Präsentationsmatrix*

$$\begin{pmatrix} f_{11} & 0 \\ 0 & M' \end{pmatrix}, \quad M' \in \mathrm{M}(n-1; K[X]).$$

Hier sind natürlich Varianten möglich.

(4) *Falls $f_{11} \nmid f_{ij}$ $(i, j > 1)$, so lässt sich durch Addition der ersten Zeile zur i-ten sowie Subtraktion eines Vielfachen der ersten Spalte von der j-ten erreichen, dass an der (i, j)-ten Position ein Eintrag g_{ij} steht mit $0 \le \deg(g_{ij}) < \deg(f_{11})$. Dann werden die vorhergehenden Schritte wiederholt, bis eine Matrix der Gestalt* (3) *mit $f_{11} \,|\, \mathrm{ggT}(M')$ entsteht.*

Achtung, wir „zerstören“ dabei die bereits erreichte Gestalt mit Nullen neben und unterhalb der Position $(1, 1)$.

(5) *Nun wird die Teilmatrix* M' *entsprechend umgeformt; der größte gemeinsame Teiler der so entstandenen Matrix ist unverändert durch* f_{11} *teilbar. Fortsetzung des Verfahren ergibt nach endlich vielen Schritten eine Diagonalmatrix* $\mathrm{diag}(f_{11}, \ldots, f_{nn})$ *mit* $f_{11} \,|\, f_{22} \,|\, \ldots \,|\, f_{nn}$.

Nach Multiplikation mit geeigneten Konstanten $\neq 0$ *erhalten wir die Elementarteiler* $\mathrm{e}_i(\varphi) = f_{ii}$ *des Endomorphismus* φ.

Wer angesichts dieses aufwändigen Algorithmus auf die Idee kommt, sein bevorzugtes Computeralgebrasystem zu benutzen, erspart sich einige Qualen. Allerdings ist die praktische Ausführung einiger Beispiele für das Verständnis von Nutzen.
Die Kombination des unter 5/4/24 dargestellten Algorithmus mit der direkten Methode, die sich aus der Definition der Determinantenteiler ergibt, kann im Einzelfall schnell zum Ziel führen.

Beispiel. Zur Bestimmung der Normalform einer Präsentationsmatrix für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3; \mathbb{F}_2)$$

wird die charakteristische Matrix

$$X \cdot \mathrm{E}_3 - A = \begin{pmatrix} X & 1 & 1 \\ 1 & X & 1 \\ 1 & 1 & X \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3, \mathbb{F}_2[X])$$

äquivalent umgeformt. Nach Vertauschen der ersten beiden Zeilen entsteht eine Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & X & 1 \\ X & 1 & 1 \\ 1 & 1 & X \end{pmatrix},$$

die an der Position $(1,1)$ einen von 0 verschiedenen Eintrag minimalen Grades besitzt. Durch Subtraktion geeigneter Vielfacher der ersten Zeile von den übrigen ergibt sich daraus die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & X & 1 \\ 0 & X^2+1 & X+1 \\ 0 & X+1 & X+1 \end{pmatrix},$$

deren erste Spalte bereits die gewünschte Gestalt hat; sie ist offensichtlich äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & X^2+1 & X+1 \\ 0 & X+1 & X+1 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\mathrm{e}_1(A) = 1$ muss die Teilmatrix

$$C = \begin{pmatrix} X^2+1 & X+1 \\ X+1 & X+1 \end{pmatrix} \quad \text{zur Matrix} \quad \begin{pmatrix} \mathrm{e}_2(A) & 0 \\ 0 & \mathrm{e}_3(A) \end{pmatrix}$$

Wir entnehmen $\mathrm{d}_1(A) = 1$ direkt aus der Definition.

äquivalent sein. Anstatt den obigen Algorithmus fortzusetzen (was ebenfalls ganz leicht wäre), lassen sich in diesem besonders einfachen Fall auch die größten gemeinsamen Teiler $\mathrm{d}_3(A)$ und $\mathrm{d}_2(A)$ der äußeren Potenzen $\Lambda^i(C)$ ($i = 2, 1$) schnell bestimmen: Dies sind im ersten Fall die Determinante und im zweiten der ggT aller Einträge von C. So ergeben sich

$$\mathrm{e}_3(A) = \frac{\mathrm{d}_3(A)}{\mathrm{d}_2(A)} = X^2 + X\,, \quad \mathrm{e}_2(A) = \mathrm{d}_2(A) = X + 1$$

und damit die gesuchte Normalform

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & X+1 & 0 \\ 0 & 0 & X^2+X \end{pmatrix}$$

der Präsentationsmatrix für A. ❑

Schwerpunkte zum gewählten Stoff

- Präsentationsmatrix eines Endomorphismus [5/4/15]
- Determinantenteiler und Elementarteiler eines Endomorphismus [5/4/16 – 5/4/18]
- Teilbarkeitseigenschaften der Elementarteiler; jordansche Normalform und Elementarteiler bestimmen sich gegenseitig [5/4/19 – 5/4/23]
- Smithsche Normalform (rechnerische Bestimmung der Elementarteiler) [5/4/24]

Sachverzeichnis