© M. Roczen und H. Wolter
Preview zur aktuellen Fassung:
Lineare Algebra individuell
Online Ver. 0.52, 15.5.2005
Alle Rechte vorbehalten

Kapitel 5

Endomorphismen von Vektorräumen

$V \neq \mathbf{0}$ sei ein Vektorraum über dem Körper K und $n = \dim_K(V) < \infty$. Die Endomorphismen $\varphi : V \to V$ werden bezüglich einer Basis $\mathcal{B}$ von V durch die zugeordnete Matrix $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ beschrieben; variiert $\mathcal{B}$, so entstehen (im Allgemeinen) unterschiedliche Matrizen. Die Fragestellung nach einer Normalform trat implizit schon im 18. Jahrhundert auf. Sie wurde in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts durch C. Jordan (zunächst über den Körpern $\mathbb{F}_p$, dann über $\mathbb{C}$) behandelt und später durch M. Hamburger in geschlossener Form dargestellt. Ein wichtiges Motiv war die Untersuchung linearer Differenzialgleichungen.

Dieses Kapitel gibt eine Einführung in die Klassifikation der Endomorphismen eines Vektorraumes. Die Aufgabenstellung ist äquivalent zum Auffinden eines Systems von Normalformen der hier als Ähnlichkeit bezeichneten Äquivalenzrelation $\approx$ auf der Menge $\mathrm{M}(n; K)$ quadratischer Matrizen über K. Es ist nahe liegend, nach „möglichst einfachen“ Repräsentanten der Klassen zu suchen.

5.4 Die jordansche Normalform

Wie wir bereits wissen, induzieren gewisse Endomorphismen $\varphi : V \to V$ eine direkte Zerlegung des Vektorraumes V in die zugehörigen Eigenräume. Zur Untersuchung beliebiger Endomorphismen wird der Begriff des Eigenraumes folgendermaßen erweitert.

5/4/1

Im Gegensatz zur Zerlegung in Eigenräume, die nur unter einschränkenden Bedingungen existiert, kann nach Skalarerweiterung zu jedem beliebigen Endomorphismus φ eine Hauptraumzerlegung gefunden werden. Ist φ diagonalisierbar, so stimmt diese mit der Eigenraumzerlegung überein.

Bemerkung – Definition. λ sei ein Eigenwert von $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$.

(1) Die Kerne $V_{\lambda,k} := \ker\big((\lambda\cdot\mathrm{id}_V - \varphi)^k\big)$ bilden eine aufsteigende Kette

$$V_\lambda = V_{\lambda,1} \subseteq \ldots \subseteq V_{\lambda,k} \subseteq V_{\lambda,\,k+1} \subseteq \ldots$$

von Unterräumen des Vektorraumes V, sie heißen auch *höhere Eigenräume* von φ.

(2) $$\mathrm{H}(\varphi,\lambda) := \bigcup_{k=1}^{\infty} \ker\big((\lambda\cdot\mathrm{id}_V - \varphi)^k\big) = \bigcup_{k=1}^{\infty} V_{\lambda,k}$$

ist ein φ-invarianter Unterraum positiver Dimension; er heißt *Hauptraum*, auch *Primärkomponente von* φ zum Eigenwert λ.

Die Inklusionen unter (1) sind leicht einzusehen und es ergibt sich, dass die Vereinigung $\mathrm{H}(\varphi,\lambda)$ der Unterräume $V_{\lambda,k}$ selbst ein Unterraum von V ist. φ-Invarianz von $\mathrm{H}(\varphi,\lambda)$ folgt, da im Endomorphismenring $\mathrm{End}_K(V)$ die Beziehung

$$(\lambda\cdot\mathrm{id}_V - \varphi)^k\cdot\varphi = \varphi\cdot(\lambda\cdot\mathrm{id}_V - \varphi)^k$$

gilt, mit $\boldsymbol{x} \in V_{\lambda,k} = \ker((\lambda\cdot\mathrm{id}_V - \varphi)^k)$ also

$$(\lambda\cdot\mathrm{id}_V - \varphi)^k\big(\varphi(\boldsymbol{x})\big) = (\varphi\cdot(\lambda\cdot\mathrm{id}_V - \varphi)^k)(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$$

und daher $\varphi(\boldsymbol{x}) \in V_{\lambda,k}$ sein muss. Wir sehen sogar noch mehr:
In der aufsteigenden Kette der Unterräume $\ker\big((\lambda\cdot\mathrm{id}_V - \varphi)^k\big)$ im endlichdimensionalen Vektorraum V kann es nur endlich viele verschiedene geben.

Tatsächlich ist $K[\varphi] \subseteq K[X]$ ein kommutativer Unterring; dies folgt aus den Potenzrechenregeln für φ.

Damit gilt $\mathrm{H}(\varphi,\lambda) = \ker\big((\lambda\cdot\mathrm{id}_V - \varphi)^m\big)$ für eine Zahl $m \in \mathbb{N}$, und die Einschränkung von $\lambda\cdot\mathrm{id}_V - \varphi$ auf $\mathrm{H}(\varphi,\lambda)$ ist nilpotent. Wie wir bereits wissen, genügt es dann, für m die Dimension dieses Hauptraumes zu wählen, d.h.

$$(\lambda\cdot\mathrm{id}_V - \varphi)^{\dim(\mathrm{H}(\varphi,\lambda))}|_{\mathrm{H}(\varphi,\lambda)} = 0$$

(vgl. 5/3/3 (4)). Bezüglich einer geeigneten Basis besitzt $(\lambda\cdot\mathrm{id}_V - \varphi)|_{\mathrm{H}(\varphi,\lambda)}$ eine obere Dreiecksmatrix mit Nullen auf der Hauptdiagonale (5/3/3 (3)). $\chi_{\varphi|_{\mathrm{H}(\varphi,\lambda)}}$ ist daher Determinante einer oberen Dreiecksmatrix, deren sämtliche Diagonaleinträge $X - \lambda$ sind und es ergibt sich

$$\chi_{\varphi|_{\mathrm{H}(\varphi,\lambda)}} = (X-\lambda)^{\dim(\mathrm{H}(\varphi,\lambda))}$$ 5/4/2

als charakteristisches Polynom der Einschränkung von φ auf $\mathrm{H}(\varphi,\lambda)$.

Der folgende Satz ist ein Spezialfall der später als *Primärzerlegung* bezeichneten natürlichen Zerlegung von V bezüglich φ. 5/4/3

Im allgemeinen Fall ist χ_φ natürlich nicht Produkt linearer Polynome!

Satz. (*Hauptraumzerlegung*)
Es sei $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus mit charakteristischem Polynom

$$\chi_\varphi = (X-\lambda_1)^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot(X-\lambda_s)^{\alpha_s},$$

das die paarweise verschiedenen Nullstellen $\lambda_1,\ldots,\lambda_s$ besitzt. Dann gilt

$$\dim\big(\mathrm{H}(\varphi,\lambda_i)\big) = \alpha_i,$$
$$\mathrm{H}(\varphi,\lambda_i) = \ker(\varphi - \lambda\cdot\mathrm{id}_V)^{\alpha_i} \quad (i = 1,\ldots,s),$$
$$V = \mathrm{H}(\varphi,\lambda_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{H}(\varphi,\lambda_s).$$

Beweis. λ sei einer der Eigenwerte λ_i, $H := \mathrm{H}(\varphi,\lambda)$ und $\alpha := \alpha_i$. Wir wählen eine Zahl m, für die $H = \ker(\varphi - \lambda\cdot\mathrm{id}_V)^k$ ist, sofern $k \geq m$. Weiter setzen wir $\psi := (\varphi - \lambda\cdot\mathrm{id}_V)^m$, $W := \mathrm{im}(\psi)$. Dann gilt

(1) $V = H \bigoplus W$, und H, W sind φ-invariante Unterräume.

Das ergibt sich folgendermaßen: Ist $\boldsymbol{x} \in H \cap W$, so muss $\boldsymbol{x} = \psi(\boldsymbol{y})$ sein für einen geeigneten Vektor $\boldsymbol{y} \in V$ sowie $\psi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$. Daher ist $\psi^2(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$, d.h. (wegen $\ker(\psi^2) = \ker(\psi) = H$) $\boldsymbol{y} \in \ker(\psi)$, also $\boldsymbol{x} = \psi(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$. Damit ist $H \cap W = \boldsymbol{0}$, und aus $\dim(V) = \dim(\mathrm{im}(\psi)) + \dim(\ker(\psi))$ folgt $V = H \bigoplus W$. Die φ-Invarianz von W ergibt sich wie für H, da in $\mathrm{End}_K(V)$ der Endomorphismus $\psi = \lambda\cdot\mathrm{id}_V - \varphi$ mit φ kommutiert.

Das ist uns eine kleine Überlegung wert: Es sei $\boldsymbol{y} \in \mathrm{im}(\psi) = W$, so folgt $\boldsymbol{y} = \psi(\boldsymbol{x})$, daher $\varphi(\boldsymbol{y}) = \varphi(\psi(\boldsymbol{x})) = \psi(\varphi(\boldsymbol{x})) \in \mathrm{im}(\psi)$.

(2) $\chi_{\varphi|\,H} = (X-\lambda)^\alpha$, insbesondere ist $\alpha = \deg(\chi_{\varphi|\,H}) = \dim\big(\mathrm{H}(\varphi,\lambda)\big)$.

Zum Beweis stellen wir zunächst fest, dass $\chi_\varphi = \chi_{\varphi|H}\cdot\chi_{\varphi|W}$ ist (vgl. 5/1/8). Zuvor haben wir gesehen, dass $\chi_{\varphi|H} = (X-\lambda)^\mu$ eine Potenz von $X - \lambda$ ist (5/4/2). Aus $(X-\lambda)^\mu \mid \chi_\varphi$ folgt $\mu \leq \alpha$. Wäre $\mu < \alpha$, so müsste λ Nullstelle von $\chi_{\varphi|W}$ sein, daher λ Eigenwert der Einschränkung von φ auf W. Ein Eigenvektor $\boldsymbol{x} \in W$ von φ zu λ liegt jedoch in $\ker(\lambda\cdot\mathrm{id}_V - \varphi) \subseteq H$. Aus $\boldsymbol{x} \in H \cap W$ folgt nach (1) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, ↯.

Hier wenden wir den Satz über die eindeutige Primfaktorzerlegung eines Polynoms aus $K[X]$ auf χ_φ an.

Die Zerlegung von V in eine direkte Summe der Haupträume ergibt sich induktiv, indem (1), (2) entsprechend auf W und die weiteren Eigenwerte von φ angewendet werden. ❑

Korollar. (*Satz von Cayley–Hamilton*) 5/4/4
Für jeden Homomorphismus $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ gilt $\chi_\varphi(\varphi) = \boldsymbol{0}$.

Interessant ist zunächst, dass überhaupt ein (nicht konstantes) Polynom f mit $f(\varphi) = \boldsymbol{0}$ existiert – das allein ist aber viel leichter zu beweisen. Später zeigt sich, dass wir hier eine noch genauere Information erhalten haben.

Beweis. Formulieren wir die Aussage in Matrixform, so wird offensichtlich, dass die Behauptung nicht von einer Skalarerweiterung abhängig ist; o.B.d.A. können wir daher K durch den Zerfällungskörper K' von $\chi_\varphi \in K[X]$ ersetzen. Dann ist $\chi_\varphi = (X-\lambda_1)^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot(X-\lambda_i)^{\alpha_s}$ mit paarweise verschiedenen Zahlen $\lambda_i \in K'$ und $V = H_1 \bigoplus \ldots \bigoplus H_s$ direkte Summe der Haupträume $H_i = \mathrm{H}(\varphi,\lambda_i)$. Der Endomorphismus

η ist Vielfachensumme der Potenzen von φ.

$$(*) \qquad \eta := \chi_\varphi(\varphi) = (\varphi - \lambda_1 \cdot \mathrm{id}_V)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (\varphi - \lambda_s \cdot \mathrm{id}_V)^{\alpha_s}$$

überführt (ebenso wie φ) die Haupträume H_i in sich. Es genügt daher zu zeigen, dass $\eta|_{H_i} = \mathbf{0}$ ist. $\varphi - \lambda_i \cdot \mathrm{id}_V$ ist jedoch ein nilpotenter Endomorphismus auf dem α_i-dimensionalen Raum H_i, womit wegen der Vertauschbarkeit der Faktoren in $(*)$ die Behauptung folgt. ❑

Anmerkung. Die im Beweis für das Korollar auftretenden Homomorphismen $(\varphi - \lambda_j \cdot \mathrm{id}_V)|_{H_i} : H_i \to H_i$ sind für $j \neq i$ Isomorphismen, denn ein von $\mathbf{0}$ verschiedenes Element des Kerns von $(\varphi - \lambda_j \cdot \mathrm{id}_V)|_{H_i}$ wäre aus zwei verschiedenen Haupträumen, ↯. 5/4/5

Warnung. Der Satz zeigt, dass $\chi_A(A)$ für eine Matrix $A \in \mathrm{M}(n; K)$ stets die Nullmatrix ist. Wer nun glaubt, den Satz bewiesen zu haben, indem er in $\chi_A = \det(X \cdot \mathrm{E}_n - A)$ zunächst X durch A ersetzt und dann die Determinante der Nullmatrix bestimmt, sollte überlegen, was das Operationszeichen im Ausdruck $X \cdot \mathrm{E}_n$ bedeutet. 5/4/6

... so funktioniert es nur für $n = 1$ (beliebter Trugschluss).

Nach dem Satz von Cayley-Hamilton ist der Kern $\boldsymbol{a}$ des K-Algebrahomomorphismus 5/4/7

$$K[X] \to \mathrm{End}_K(V), \quad X \mapsto \varphi$$

vom Nullideal verschieden; es gibt daher ein eindeutig bestimmtes normiertes Polynom minimalen Grades in $\boldsymbol{a}$, das gleichzeitig erzeugendes Element dieses Hauptideals ist (vgl. 2/4/15).

Definition. (*Minimalpolynom*)
Das normierte Polynom m_φ minimalen Grades in $K[X]$, für das $\mathrm{m}_\varphi(\varphi) = \mathbf{0}$ ist, heißt *Minimalpolynom des Endomorphismus* $\varphi : V \to V$.

Der Begriff *Minimalpolynom* wird auch in allgemeinerem Zusammenhang verwendet; wir beziehen uns stets auf einen konkreten Endomorphismus.

Der Satz von Cayley – Hamilton zeigt, dass das charakteristische Polynom von φ durch m_φ teilbar ist; genauere Information gibt die folgende

Bemerkung. *Das Minimalpolynom eines Endomorphismus ändert sich bei Anwendung einer Skalarerweiterung nicht. Wir bezeichnen nun mit* 5/4/8

- $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ *die Nullstellen von* $\chi_\varphi \in K[X]$ *im Zerfällungskörper* K',
- $H_i := \mathrm{H}(\varphi_{K'}, \lambda_i) \subseteq V_{K'}$ *die Haupträume des durch Skalarerweiterung entstandenen Endomorphismus* $\varphi_{K'} \in \mathrm{End}_{K'}(V_{K'})$,
- m_i *die maximalen Längen zyklischer Vektoren für die nilpotenten Endomorphismen* $(\varphi_{K'} - \lambda_i \cdot \mathrm{id}_{V_{K'}})|_{H_i}$ *der Haupträume* $H_i \subseteq V_{K'}$ ($i = 1, \ldots, s$).

Vgl. 5/3/7 zum Begriff des zyklischen Vektors.

Dann ist

$$(*) \qquad \mathrm{m}_\varphi = (X - \lambda_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (X - \lambda_s)^{m_s}$$

K muss $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ nicht enthalten!

das Minimalpolynom von φ*; insbesondere ist das Produkt auf der rechten Seite von* $(*)$ *ein Polynom über dem Grundkörper* K.

Beweis. Offenbar ist der Grad von m_φ die kleinste natürliche Zahl k, für die $\varphi^0, \varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^k \in \mathrm{End}_K(V)$ linear abhängig sind. Dann existieren $a_0, \ldots, a_k \in K$ mit $a_k \neq 0$, für die $\sum_{i=0}^k a_i \varphi^i = \mathbf{0}$ ist, und wir erhalten $\mathrm{m}_\varphi = \sum_{i=0}^k \frac{a_i}{a_k} X^i$ als Minimalpolynom von φ.

Nach 5/4/4 genügt es, $k \leq n$ zu betrachten.

Weiter folgt, dass die Koeffizienten des Polynoms m_φ durch Lösung linearer Gleichungssysteme über dem Grundkörper bestimmt werden können, m_φ sich bei Skalarerweiterung also nicht ändert. Daher kann o.B.d.A angenommen werden, dass das charakteristische Polynom χ_φ in Linearfaktoren zerfällt. Die einzig möglichen irreduziblen Faktoren von m_φ sind Teiler des

charkteristischen Polynoms χ_φ und daher die linearen Polynome $X - \lambda_i$. Wir haben nur noch ihre Multiplizitäten zu bestimmen.
Beschränken wir uns auf den direkten Summanden H_i von V, so zeigt sich, dass m_i die kleinste natürliche Zahl mit $(\varphi - \lambda_i \cdot \mathrm{id}_V)^{m_i}|_{H_i} = \mathbf{0}$ ist. Überdies sind nach 5/4/5 die Einschränkungen $(\varphi - \lambda_j \cdot \mathrm{id}_V)|_{H_i}$ für $j \neq i$ Isomorphismen. Es folgt, dass $(X - \lambda_i)^{m_i}$ die größte Potenz von $X - \lambda_i$ ist, die das Minimalpolynom m_φ teilt. ❑

Die Hauptraumzerlegung wird nun in Matrizenform angegeben. In Analogie zu vorhergehenden Begriffen sprechen wir von den *höheren Eigenräumen*, den *Haupträumen* $\mathrm{H}(A, \lambda)$ bzw. dem *Minimalpolynom* m_A einer quadratischen Matrix $A \in \mathrm{M}(n; K)$, wenn wir uns auf den Endomorphismus φ des Standardraumes K^n mit $\mathrm{M}(\varphi) = A$ beziehen. 5/4/9

Die nachfolgenden speziellen Matrizen sind uns für $\lambda = 0$ bereits bei der Bestimmung der Normalformen im nilpotenten Fall begegnet.

Bezeichnung. (*elementarer Jordanblock*)
Eine Matrix

$$\mathrm{J}(m, \lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & & & & \\ 1 & \lambda & & \mathbf{0} & \\ 0 & 1 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(m; K)$$

heißt *elementarer Jordanblock zum Eigenwert* λ (dabei ist der Fall $m = 1$ als $\mathrm{J}(1, \lambda) := (\lambda) \in \mathrm{M}(1; K)$ zu lesen).

Der Satz über die Hauptraumzerlegung lässt sich nun folgendermaßen formulieren.

Korollar. (*jordansche Normalform*) 5/4/10

$\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ *sei ein Endomorphismus, dessen charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt,*

$$\chi_\varphi = (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots (X - \lambda_s)^{\alpha_s} \quad \textit{mit} \quad \lambda_i \in K, \quad \lambda_i \neq \lambda_j \quad \textit{für} \quad i \neq j,$$

dann existiert eine Basis $\mathcal{B}$ *von* V*, für die*

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \mathrm{J}(m_{11}, \lambda_1) & & & & & \\ & \ddots & & & \mathbf{0} & \\ & & \mathrm{J}(m_{1\,r_1}, \lambda_1) & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \mathrm{J}(m_{s1}, \lambda_s) & \\ & \mathbf{0} & & & & \ddots \\ & & & & & \mathrm{J}(m_{s\,r_s}, \lambda_s) \end{pmatrix}$$

eine Blockmatrix mit elementaren Jordanblöcken längs der Hauptdiagonale ist. Wird die Reihenfolge der Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ *vorgegeben und*

$$\begin{array}{c} m_{11} \geq \ldots \geq m_{1\,r_1} \\ \vdots \\ m_{s1} \geq \ldots \geq m_{s\,r_s} \end{array}$$

gewählt, so ist diese Matrix durch φ *eindeutig bestimmt;* sie heißt *jordansche Normalform* des Endomorphismus φ.
Entsprechend wird für eine Matrix $A \in \mathrm{M}(n; K)$, deren charakteristisches Polynom Produkt linearer Polynome ist, eine jordansche Normalform von $\varphi : K^n \to K^n$ mit $\mathrm{M}(\varphi) = A$ als *jordansche Normalform der Matrix* A

bezeichnet; *sie ist in ihrer Ähnlichkeitsklasse in demselben Sinn eindeutig bestimmt.*
Wir entnehmen überdies:

(1) $\mathrm{m}_\varphi = (X-\lambda_1)^{m_{11}} \cdot (X-\lambda_2)^{m_{21}} \cdot \ldots \cdot (X-\lambda_s)^{m_{s1}}$
ist das Minimalpolynom des Endomorphismus φ bzw. einer beliebigen Matrix mit der angegebenen jordanschen Normalform.

(2) *Die geometrische Multiplizität $\gamma_{\lambda_i} = \dim\big(\ker(\varphi - \lambda_i \cdot \mathrm{id}_V)\big)$ des Eigenwerts λ_i stimmt mit der Anzahl der in der Normalform auftretenden elementaren Jordanblöcke zu λ_i überein.*

Beweis. Die Existenz einer Basis mit der gesuchten Eigenschaft ergibt sich, indem für jeden Hauptraum $H_i := \mathrm{H}(\varphi, \lambda_i)$ eine Basis gewählt wird, bezüglich der die Matrix des nilpotenten Endomorphismus $(\varphi - \lambda_i \cdot \mathrm{id}_V)|_{H_i}$ eine Normalform gemäß Satz 5/3/10 annimmt.
Zum Beweis der Eindeutigkeit bemerken wir zunächst, dass aus der im Satz angegebenen Basis $\mathcal{B}$ und der Matrix $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ unmittelbar die Haupträume $\mathrm{H}(\varphi, \lambda_i)$ abgelesen werden können: Sie werden von den Vektoren $\boldsymbol{b}_j$ erzeugt, für die λ_i an (j,j)-ter Position in $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ vorkommt. Die Haupträume sind aber durch φ eindeutig bestimmt, und die Einschränkung von $\varphi - \lambda_i \cdot \mathrm{id}_V$ auf den φ-invarianten Unterraum $\mathrm{H}(\varphi, \lambda_i)$ ist nilpotent. Damit folgt die Behauptung aus der entsprechenden Eindeutigkeitsaussage für nilpotente Endomorphismen (vgl. 5/3/6). ❑

Der Bedingung $(\varphi - \lambda_i \cdot \mathrm{id}_V)^{\alpha_i}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ entspricht ein lineares Gleichungssystem für die Koordinaten der zugehörigen Vektoren aus V.

Bezeichnung – Bemerkung.

(1) Eine Blockdiagonalmatrix aus elementaren Jordanblöcken zum selben Eigenwert (angeordnet nach absteigender Größe) wird als *Jordanblock* bezeichnet. Die Jordanblöcke eines Endomorphismus sind bis auf Permutation eindeutig bestimmt; wir sprechen dennoch (etwas nachlässig) von *der* jordanschen Normalform.

(2) Das Tupel $(\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$ aller verschiedenen Eigenwerte und die sog. *Segre-Charakteristik* $[(m_{11}, \ldots, m_{1r_1}) \ldots (m_{s1}, \ldots, m_{sr_s})]$, die aus den zugehörigen Partitionen der Dimensionen der Haupträume gebildet wird, ergeben eine vollständige Beschreibung der jordanschen Normalform. Insbesondere entspricht der Eintrag $(m_{i1}, \ldots, m_{ir_i})$ dem i-ten Jordanblock, der seinerseits aus den elementaren Blöcken $\mathrm{J}(m_{i1}, \lambda_i), \ldots, \mathrm{J}(m_{ir_i}, \lambda_i)$ zusammengesetzt ist.

Rechenverfahren. (*Bestimmung der jordanschen Normalform*) 5/4/11

$A \in \mathrm{M}(n; K)$ sei eine Matrix, deren charakteristisches Polynom Produkt linearer Polynome ist, φ bezeichnet den entsprechenden Endomorphismus des Standardraumes $V := K^n$.

1. Schritt:

Wir bestimmen die Nullstellen λ_i des charakteristischen Polynoms sowie Basen der zugehörigen Haupträume $H_i := \mathrm{H}(\varphi, \lambda_i)$.

$H_i = \ker(\varphi - \lambda_i \cdot \mathrm{id}_V)^{\alpha_i}$, wobei $\alpha_i :=$ algebraische Multiplizität von λ_i.

2. Schritt:

Auf die nilpotenten Endomorphismen $\psi_i := (\varphi - \lambda_i \cdot \mathrm{id}_V)|_{H_i}$ wird das Verfahren 5/3/12 angewendet. Wir erhalten Basen $\mathcal{B}_i$ der Unterräume H_i, für die ψ_i die Normalform einer nilpotenten Matrix annimmt, d.h.

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_i}(\varphi_i) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_i}(\psi_i + \lambda_i \cdot \mathrm{id}_{H_i}) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_i}(\psi_i) + \lambda_i \cdot \underbrace{\mathrm{M}_{\mathcal{B}_i}(\mathrm{id}_{H_i})}_{\mathrm{E}_{\dim(H_i)}}$$

ist eine Blockdiagonalmatrix aus elementaren Jordanblöcken zum Eigenwert λ_i. Durch Zusammensetzen der Basen $\mathcal{B}_i$ zu einer Basis $\mathcal{B}$ von V ergibt sich die jordansche Normalform für A als $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

Beispiel. Wir bestimmen die jordansche Normalform J der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & 6 & 2 & -5 \\ -3 & -1 & 3 & 2 & -2 \\ -4 & -1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(5;\mathbb{C})$$

sowie eine Matrix $U \in \mathrm{GL}(5;\mathbb{C})$, für die $J = U^{-1} \cdot A \cdot U$ ist.

Zunächst werden die Eigenwerte bestimmt. Es ist

$$\begin{aligned} \chi_A = \det(X \cdot \mathrm{E}_5 - A) &= X^5 - 9X^4 + 27X^3 - 27X^2 \\ &= X^2 \cdot (X-3)^3, \end{aligned}$$

d.h. A besitzt einen Eigenwert $\lambda_1 = 0$ der (algebraischen) Multiplizität 2 und einen Eigenwert $\lambda_2 = 3$ der (algebraischen) Multiplizität 3.
Für die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^5$ mit $\mathrm{M}(\varphi) = A$ erhalten wir als Haupträume

$$H_1 := \mathrm{H}(\varphi, 0) = \ker(\varphi^2) \quad \text{und} \quad H_2 := \mathrm{H}(\varphi, 3) = \ker\big((\varphi - 3 \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{C}^5})^3\big).$$

H_1 ist Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems mit der Koeffizientenmatrix

$$A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 3 & 3 & -12 \\ -6 & 0 & 6 & -3 & 3 \\ -9 & 9 & 18 & 9 & -18 \\ -9 & 0 & 9 & 9 & -9 \\ -15 & 0 & 15 & 6 & -6 \end{pmatrix},$$

für den durch leichte Rechung eine Basis $\big((0,1,0,1,1),(1,-1,1,0,0)\big)$ gefunden wird. Nun ist die Filtrierung von H_1 durch $\mathbf{0} \subseteq \ker(\varphi) \subseteq \ker(\varphi)^2 = H_1$ zu bestimmen. $\ker(\varphi)$ ist Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems mit der Koeffizientenmatrix A; eine Basis ist durch den Vektor $(1,0,1,1,1)$ gegeben. Wir ergänzen diesen zu einer Basis von $\ker(\varphi^2)$ und erhalten z.B. $\boldsymbol{w}_1 := (0,1,0,1,1)$ als zyklischen Vektor im 2-dimensionalen Hauptraum H_1; er bildet zusammen mit $\boldsymbol{w}_2 := \varphi(\boldsymbol{w}_1) = (-1,0,-1,-1,-1)$ eine zyklische Basis für H_1.
Wir untersuchen nun den Hauptraum H_2. Zur Vereinfachung der Bezeichnungen wird $\psi := \varphi - \lambda_2 \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{C}^5}$ gesetzt. Wie im ersten Schritt haben wir die Filtrierung von H_2 durch die Unterräume $\ker(\psi^i)$ zu bestimmen, wobei ψ die Matrix

$$\mathrm{M}(\psi) = A - 3 \cdot \mathrm{E}_4 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & 1 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & 2 & -5 \\ -3 & -1 & 3 & -1 & -2 \\ -4 & -1 & 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

besitzt. Es ergeben sich Basen

$$\begin{aligned} &\big((-1,1,0,0,1),(0,-1,0,1,0),(1,0,1,0,0)\big) \quad \text{für} \quad \ker(\psi^2), \\ &\big((-1,1,0,0,1),(1,0,1,0,0)\big) \quad \text{für} \quad \ker(\psi). \end{aligned}$$

Wegen $\dim(H_2) = 3$ gilt $\ker(\psi^2) = \ker(\psi^3) = H_2$, und zum nilpotenten Endomorphismus $\psi|_{H_2}$ gehört die Partition $(2,1)$. Ein zyklischer Vektor der Länge 2 entsteht durch Ergänzung der Basis für $\ker(\psi)$ zu einer Basis für $\ker(\psi^2)$ nach dem Austauschverfahren; wir erhalten $\boldsymbol{w}_3 := (0,-1,0,1,0)$ und $\boldsymbol{w}_4 := \psi(\boldsymbol{w}_3) = (-1,1,0,0,1)$. Entsprechend wird $\boldsymbol{w}_4 \in \ker(\psi)$ durch den Vektor $\boldsymbol{w}_5 := (1,0,1,0,0)$ zu einer Basis von $\ker(\psi)$ ergänzt.

Für die so erhaltene Basis $\mathcal{B} = (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{w}_4, \boldsymbol{w}_5)$ des 5-dimensionalen Standardraumes ist $J := \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ jordansche Normalform von φ und daher

$$J = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0 \\ 0&0&3&0&0 \\ 0&0&1&3&0 \\ 0&0&0&0&3 \end{pmatrix} = U^{-1} \cdot A \cdot U \quad \text{mit} \quad U = \begin{pmatrix} 0&-1&0&-1&1 \\ 1&0&-1&1&0 \\ 0&-1&0&0&1 \\ 1&-1&1&0&0 \\ 1&-1&0&1&0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix besitzt einen elementaren Jordanblock für den Eigenwert 0 und zwei für den Eigenwert 3. Die Segre-Charakteristik zum Paar $(0,3)$ der Eigenwerte ist $[(2)(2,1)]$. ❏

Mittels 5/4/10 ziehen wir weitere Folgerungen aus den Eigenschaften der Jordanform.

Ist ein Endomorphismus diagonalisierbar, so muss seine jordansche Normalform selbst eine Diagonalmatrix sein (die elementaren Jordanblöcke sind aus $\mathrm{M}(1;K)$). Daraus ergibt sich ein Diagonalisierbarkeitskriterium.

Korollar. $\varphi : V \to V$ sei ein Endomorphismus. 5/4/12

(1) *φ ist genau dann diagonalisierbar, wenn das Minimalpolynom m_φ Produkt paarweise nichtassoziierter linearer Polynome ist.*

(2) *φ ist genau dann halbeinfach, wenn das Minimalpolynom zu seiner Ableitung teilerfremd ist, d.h.* $\mathrm{ggT}(\mathrm{m}_\varphi, \mathrm{m}'_\varphi) = 1$.

Leider haben wir hier das Problem, m_φ zu bestimmen, vgl. auch 5/2/8 .

Beweis. Da bei Skalarerweiterung das Minimalpolynom unverändert bleibt (vgl. 5/4/8), folgt (2) aus (1) und 2/4/21 . ❏

Offensichtlich existiert eine jordansche Normalform zumindest nach Erweiterung des Grundkörpers. Besonders einfach kann die Existenzaussage formuliert werden, wenn über dem gegebenen Körper nichtkonstante Polynome stets in Linearfaktoren zerfallen. 5/4/13

... so wie das nach dem Fundamentalsatz der Algebra im komplexen Fall gilt.

Korollar. *Jede Matrix $A \in \mathrm{M}(n;\mathbb{C})$ besitzt eine (im obigen Sinn eindeutig bestimmte) jordansche Normalform.*

Schwerpunkte zum gewählten Stoff

- Höhere Eigenräume eines Endomorphismus und Hauptraumzerlegung [5/4/1 – 5/4/3]
- Der Satz von Cayley-Hamilton und das Minimalpolynom eines Endomorphismus [5/4/4 – 5/4/8]
- Existenz und Eindeutigkeit der jordanschen Normalform eines Endomorphismus, dessen charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt [5/4/9 – 5/4/10, 5/4/13]
- Rechnerische Bestimmung der jordanschen Normalform einer Matrix [5/4/11]

Sachverzeichnis

Symbole

$[(m_{11}, \ldots, m_{1r_1}) \ldots (m_{s1}, \ldots, m_{sr_s})]$, Segre-Charakteristik [5/4/10], 5

$\mathrm{H}(A, \lambda)$, Hauptraum einer quadratischen Matrix [5/4/9], 4

$\mathrm{H}(\varphi, \lambda)$ [5/4/1], 1

$\mathrm{J}(m, \lambda)$ [5/4/9], 4

m_A, Minimalpolynom einer quadratischen Matrix [5/4/9], 4

m_φ [5/4/7], 3

E

elementarer Jordanblock [5/4/9], 4

H
Hauptraum
– einer quadratischen Matrix [5/4/9], 4
Hauptraum eines Endomorphismus [5/4/1], 1
höherer Eigenraum
– einer quadratischen Matrix [5/4/9], 4
– eines Endomorphismus [5/4/1], 1

J
Jordanblock [5/4/10], 5
jordansche Normalform
– einer Matrix [5/4/10], 4
– eines Endomorphismus [5/4/10], 4

M
Minimalpolynom
– einer quadratischen Matrix [5/4/9], 4
– eines Endomorphismus [5/4/7], 3

P
Primärkomponente
– Begriff [5/4/1], 1
Primärzerlegung
– im Spezialfall [5/4/3], 2

S
Segre-Charakteristik [5/4/10], 5