# Kapitel 5

# Endomorphismen von Vektorräumen

$V \neq \mathbf{0}$ sei ein Vektorraum über dem Körper $K$ und $n = \dim_K(V) < \infty$. Die Endomorphismen $\varphi : V \to V$ werden bezüglich einer Basis $\mathcal{B}$ von $V$ durch die zugeordnete Matrix $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ beschrieben; variiert $\mathcal{B}$, so entstehen (im Allgemeinen) unterschiedliche Matrizen. Die Fragestellung nach einer Normalform trat implizit schon im 18. Jahrhundert auf. Sie wurde in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts durch C. Jordan (zunächst über den Körpern $\mathbb{F}_p$, dann über $\mathbb{C}$) behandelt und später durch M. Hamburger in geschlossener Form dargestellt. Ein wichtiges Motiv war die Untersuchung linearer Differenzialgleichungen.

Dieses Kapitel gibt eine Einführung in die Klassifikation der Endomorphismen eines Vektorraumes. Die Aufgabenstellung ist äquivalent zum Auffinden eines Systems von Normalformen der hier als Ähnlichkeit bezeichneten Äquivalenzrelation $\approx$ auf der Menge $\mathrm{M}(n;K)$ quadratischer Matrizen über $K$. Es ist nahe liegend, nach „möglichst einfachen“ Repräsentanten der Klassen zu suchen.

## 5.3 Nilpotente Endomorphismen

Die Klassifikation wird zunächst für Endomorphismen ausgeführt, deren höhere Potenzen verschwinden. Beispiele dafür ergeben sich nach dem folgenden 5/3/1

**Lemma.** *Für eine obere Dreiecksmatrix*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ & 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \mathbf{0} & & 0 & a_{n-1\,n} \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(n;K)$$

*mit Nullen auf der Hauptdiagonale ist $A^n = 0$.*
*Entsprechend gilt $B^n = 0$ für jede untere Dreiecksmatrix $B \in \mathrm{M}(n;K)$, deren Hauptdiagonale aus Nullen besteht.*

**Beweis.** Mit $\varphi$ wird der Endomorphismus des Standardraumes $K^n$ bezeichnet, für den $\mathrm{M}(\varphi) = A$ ist. $(U_0, U_1, \dots, U_n)$ sei die Fahne, die durch die kanonische Basis definiert wird, $U_i = K\cdot \boldsymbol{e}_1 + \ldots + K\cdot \boldsymbol{e}_i$ für $i = 1, \dots, n$ sowie $U_i := \mathbf{0}$ für $i \leq 0$. Dann ist $\varphi(\boldsymbol{e}_i)$ (aufgrund der speziellen Gestalt der Matrix $A$) Linearkombination der Vektoren $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_{i-1}$, d.h. $\varphi(U_i) \subseteq U_{i-1}$. Induktiv folgt leicht $\varphi^j(U_i) \subseteq U_{i-j}$ $(i \leq n,\ j \geq 1)$. Wir erhalten daher $\varphi^n(V) = \varphi^n(U_n) \subseteq U_0 = \mathbf{0}$, d.h. $\varphi^n$ ist die Nullabbildung, also $A^n = \mathrm{M}(\varphi^n) = 0$. ❑

Der Beweis lässt sich natürlich auch ganz elementar ausführen.

**Definition.** Ein Endomorphismus $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ heißt *nilpotent*, falls eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ existiert, für die $\varphi^m$ die Nullabbildung ist. Die kleinste natürliche Zahl $m$ mit dieser Eigenschaft heißt *Nilpotenzindex* des Endomorphismus. 5/3/2

Entsprechend heißt eine Matrix $A \in \mathrm{M}(n;K)$ *nilpotent*, falls eine natürliche Zahl $m$ existiert, für die $A^m = 0$ ist; die kleinste Zahl $m \in \mathbb{N}$, für die $A^m = 0$ ist, heißt *Nilpotenzindex* der Matrix.

**Satz.** *Ist $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus des $n$-dimensionalen Vektorraumes $V$, so sind die folgenden Bedingungen äquivalent.* 5/3/3

(1) *$\varphi$ ist nilpotent.*

(2) $\chi_\varphi = X^n$.

(3) *Es existiert eine Basis $\mathcal{B}$ von $V$ mit folgender Eigenschaft: $\mathrm{M}_\mathcal{B}(\varphi)$ ist eine obere Dreiecksmatrix, deren Hauptdiagonale aus Nullen besteht.*

(4) *$\varphi^n$ ist die Nullabbildung.*

Das Studium der nilpotenten Endomorphismen wird sich als wesentlicher Schritt zur Klassifikation im allgemeinen Fall erweisen.

... d.h. der Nilpotenzindex eines nilpotenten Endomorphismus des Vektorraumes $V$ ist $\leq \dim(V)$.

**Beweis.** (1) $\Rightarrow$ (2): Die Voraussetzung ist unabhängig von Skalarerweiterungen (vgl. 4/4/10 (2)), daher kann o.B.d.A. angenommen werden, dass $\chi_\varphi$ Produkt linearer Polynome ist. $\lambda$ sei ein Eigenwert von $\varphi$, dann existiert ein Vektor $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$, für den $\varphi(\boldsymbol{v}) = \lambda \cdot \boldsymbol{v}$ ist. Induktiv folgt $\varphi^t(\boldsymbol{v}) = \lambda^t \boldsymbol{v}$ für $t \geq 1$. Ist nun $\varphi^m = \mathbf{0}$, so ergibt sich $\mathbf{0} = \lambda^m \boldsymbol{v}$, woraus wegen $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ offenbar $\lambda = 0$ folgt. Da die Eigenwerte von $\varphi$ (im vorliegenden Fall) genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind, bedeutet dies $\chi_\varphi = X^n$.
Die Implikation (2) $\Rightarrow$ (3) folgt aus Satz 5/2/16, nach dem eine Basis $\mathcal{B}$ existiert, für die $A = \mathrm{M}_\mathcal{B}(\varphi)$ eine obere Dreiecksmatrix ist; ihre Hauptdiagonale enthält die Eigenwerte.
(3) $\Rightarrow$ (4) ergibt sich nach dem vorhergehenden Lemma.
(4) $\Rightarrow$ (1) ist trivial. ❑

... Funktorialität der zugeordneten Matrix.

In der Sprache der Matrizenrechnung ergibt sich das folgende 5/3/4

**Korollar.** (*Charakterisierung nilpotenter Matrizen*)
*Für eine Matrix $A \in \mathrm{M}(n;K)$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent.*

(1) *$A$ ist nilpotent.*

(2) $\chi_A = X^n$.

(3) *$A$ ist einer oberen Dreiecksmatrix mit Nullen auf der Hauptdiagonale ähnlich.*

(4) *$A^n$ ist die Nullmatrix, d.h. der Nilpotenzindex von $A$ ist $\leq n$.*

Hier wird der Satz nur noch einmal mit anderen Worten aufgeschrieben. Dies ist durch die funktorielle Beziehung zwischen Matrizen und linearen Abbildungen gerechtfertigt.

Vertauschbare nilpotente Endomorphismen weisen die folgende Gemeinsamkeit mit den diagonalisierbaren bzw. halbeinfachen auf. 5/3/5

**Bemerkung.** Sind $\varphi, \psi \in \mathrm{End}_K(V)$ nilpotent sowie $\varphi \cdot \psi = \psi \cdot \varphi$, dann ist $\varphi + \psi$ nilpotent.
Ein Beweis ergibt sich, indem im Ring $\mathrm{End}_K(V)$ auf $(\varphi + \psi)^{2n}$ die binomische Formel angewendet wird: Ist $n = \dim(V)$, so gilt nach dem Satz $\varphi^n = \psi^n = 0$, d.h. jeder auftretende Summand enthält den Faktor 0. ❑

Bei Anwendung der binomischen Formel wird $\varphi \cdot \psi = \psi \cdot \varphi$ verwendet.

**Satz.** (*Klassifikation nilpotenter Endomorphismen*) 5/3/6

*$\varphi : V \to V$ sei ein nilpotenter Endomorphismus. Dann ist $V$ eine direkte Summe $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_p$ von $\varphi$-invarianten Unterräumen $U_1, \ldots, U_p$, wobei jeder der Unterräume $U_i$ eine Basis*

$$\mathcal{B}_i = (\boldsymbol{v}_{i1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{in_i}) \quad \textit{mit } \varphi(\boldsymbol{v}_{ik}) = \boldsymbol{v}_{i\,k+1} \textit{ für } k < n_i \textit{ und } \varphi(\boldsymbol{v}_{in_i}) = \mathbf{0}$$

*besitzt. Werden die Unterräume $U_i$ nach absteigender Dimension angeordnet, d.h. $n_1 \geq \ldots \geq n_p \geq 1$, so sind die Zahlen $p, n_1, \ldots, n_p$ dadurch eindeutig bestimmt.*

Dieser Satz ist das Hauptergebnis des vorliegenden Abschnitts. Er ist Spezialfall und gleichzeitig entscheidender Schritt zum Beweis des allgemeinen Resultats über die jordansche Normalform (vgl. 5/4/10).

**Beweis.** Es sei $V_i = \ker(\varphi^i)$ für $i \in \mathbb{N}$. Aus $\boldsymbol{x} \in V_i$ folgt wegen $\varphi^i(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ offenbar auch $\varphi^{i+1}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$, daher $\boldsymbol{x} \in V_{i+1}$; also ist

$$\boldsymbol{0} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \ldots \subseteq V_i \subseteq V_{i+1} \subseteq \ldots$$

eine aufsteigende Kette von Unterräumen. Aus $\dim(V) < \infty$ ergibt sich, dass nur für endlich viele Indizes $V_i \neq V_{i+1}$ gelten kann. $q$ bezeichne die kleinste Zahl, für die $V_q = V_{q+1}$ ist. Dann folgt

(1) $\qquad V_q = V_{q+i}$ für alle $i \geq 1$.

Das lässt sich folgendermaßen sehen: Der Fall $i = 1$ entspricht der Wahl von $q$. Nun wird induktiv angenommen $V_q = V_{q+i}$ für eine gegebene natürliche Zahl $i \geq 1$. Es sei $\boldsymbol{x} \in V_{q+i+1}$. Dann ist $\boldsymbol{0} = \varphi^{q+i+1}(\boldsymbol{x}) = \varphi^{q+i}(\varphi(\boldsymbol{x}))$, d.h. $\varphi(\boldsymbol{x}) \in V_{q+i}$ und daher (gemäß Induktionsannahme) $\varphi(\boldsymbol{x}) \in V_q$, d.h. $\varphi^{q+1}(\boldsymbol{x}) = \varphi^q(\varphi(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{0}$, also $\boldsymbol{x} \in V_{q+1} \subseteq V_{q+i}$. Damit ist $V_{q+i+1} \subseteq V_{q+i}$, womit (1) folgt.

Da $\varphi$ nilpotent ist, muss $\ker(\varphi^i) = V$ sein für hinreichend große Exponenten $i$. Es ergibt sich

(2) $\qquad \boldsymbol{0} = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{q-1} \subset V_q = V$.

… eine (im allgemeinen) nicht vollständige Fahne.

Wir beweisen die Existenz von Unterräumen $\boldsymbol{0} = W_0, W_1, \ldots, W_q$ mit

(3) $$\begin{cases} V_i = V_{i-1} \bigoplus W_i\,, \quad \varphi(W_i) \subseteq W_{i-1} & \text{für } i = 1, \ldots, q\,, \\ \varphi|_{W_i} \text{ ist injektiv} & \text{für } i = 2, \ldots, q\,. \end{cases}$$

Insbesondere folgt daraus

$$V_i = W_1 \oplus \ldots \oplus W_i \quad \text{für } i = 1, \ldots, q.$$

Die Räume $W_i$ werden folgendermaßen absteigend induktiv gewonnen:

Für $V_{q-1}$ wird ein Komplementärraum $W_q$ in $V = V_q$ gewählt, $V_{q-1} \bigoplus W_q = V_q$. Da im Fall $q = 1$ nichts zu beweisen ist, beschränken wir uns auf $q \geq 2$ und zeigen zunächst

(a) $\qquad \varphi(W_q) \cap V_{q-2} = \boldsymbol{0}$.

Dazu wird ein Vektor $\boldsymbol{x} \in \varphi(W_q) \cap V_{q-2}$ gewählt. Aus $\boldsymbol{x} \in \varphi(W_q)$ folgt $\boldsymbol{x} = \varphi(\boldsymbol{y})$ mit einem geeigneten Vektor $\boldsymbol{y} \in W_q$. Wegen $\boldsymbol{x} \in V_{q-2}$ ist $\boldsymbol{0} = \varphi^{q-2}(\boldsymbol{x}) = \varphi^{q-2}\big(\varphi(\boldsymbol{y})\big) = \varphi^{q-1}(\boldsymbol{y})$ und folglich $\boldsymbol{y} \in V_{q-1}$, also $\boldsymbol{y} \in V_{q-1} \cap W_q = \boldsymbol{0}$, daher $\boldsymbol{x} = \varphi(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$.

Aus $\boldsymbol{x} \in W_q$ und $\varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ folgt $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, denn dann ist $\boldsymbol{x} \in V^1 \subseteq V^{q-1}$. Es ergibt sich: Die Einschränkungsabbildung

$\boldsymbol{x} \in V^{q-1} \cap W_q = \boldsymbol{0}$

(b) $\qquad \varphi|_{W_q}$ ist injektiv.

Nun ist offensichtlich $\varphi(V_q) \subseteq V_{q-1}$. Nach (a), (b) kann durch Basisergänzung ein Komplementärraum $W_{q-1}$ zu $V_{q-2}$ in $V_{q-1}$ gefunden werden, der $\varphi(W_q)$ enthält.

Beweis für $\varphi(V_q) \subseteq V_{q-1}$: Ist $\boldsymbol{x} \in V_q$, so $\varphi^q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$, also $\varphi^{q-1}(\varphi(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{0}$.

Das bisherige Vorgehen ist bereits repräsentativ für den allgemeinen Fall, der nach Indextransformation folgt. Damit ist (3) bewiesen. Wir entnehmen daraus die Existenz einer Basis dieser Gestalt:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\boldsymbol{v}_1^{(q)} & \ldots & \boldsymbol{v}_{i_q}^{(q)} & & & & & & \\
\varphi(\boldsymbol{v}_1^{(q)}) & \ldots & \varphi(\boldsymbol{v}_{i_q}^{(q)}) & \boldsymbol{v}_1^{(q-1)} & \ldots & \boldsymbol{v}_{i_{q-1}}^{(q-1)} & & & \\
\varphi^2(\boldsymbol{v}_1^{(q)}) & \ldots & \varphi^2(\boldsymbol{v}_{i_q}^{(q)}) & \varphi(\boldsymbol{v}_1^{(q-1)}) & \ldots & \varphi(\boldsymbol{v}_{i_{q-1}}^{(q-1)}) & \boldsymbol{v}_1^{(q-2)} & \ldots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
\varphi^{q-1}(\boldsymbol{v}_1^{(q)}) & \ldots & \varphi^{q-1}(\boldsymbol{v}_{i_q}^{(q)}) & \varphi^{q-2}(\boldsymbol{v}_1^{(q-1)}) & \ldots & \varphi^{q-2}(\boldsymbol{v}_{i_{q-1}}^{(q-1)}) & \varphi^{q-3}(\boldsymbol{v}_1^{(q-2)}) & \ldots
\end{array}$$

Die erste Zeile der obigen Liste enthält eine Basis für $W_q$, die zweite eine Basis für $W_{q-1}$ usw. bis zur letzten, in der eine Basis für $W_1 = V_1 = \ker(\varphi)$ steht. Dabei entstehen die Vektoren jeder Zeile durch Ergänzung der Bilder der Vektoren der vorhergehenden zu einer Basis des entsprechenden Unterraumes $W_i$. Wegen $W_1 = \ker(\varphi)$ werden die Vektoren der letzten Zeile durch $\varphi$ auf $\boldsymbol{0}$ abgebildet, und in der $i$-ten Spalte steht die Basis eines

$\varphi$-invarianten Unterraumes von $V$, der nun mit $U_i$ bezeichnet wird. Bei Anordnung der Vektoren nach den Spalten der Tabelle ergibt sich so eine Basis $\mathcal{B}$ von $V$ mit der behaupteten Eigenschaft. Die zugehörigen Dimensionen $n_i$ der Unterräume $U_i$ sind gegeben durch

$$(n_1, \ldots, n_p) = (\underbrace{q, \ldots, q}_{i_q}, \underbrace{q-1, \ldots, q-1}_{i_{q-1}}, \underbrace{q-2, \ldots, q-2}_{i_{q-2}}, \ldots, \underbrace{1, \ldots, 1}_{i_1}),$$

wobei einzelne der Zahlen $i_j$ null sein können (d.h. $j$ tritt dann in der Folge nicht auf).

Es bleibt zu zeigen, dass $q$ und $n_i$ mit $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_p$ durch $\varphi$ eindeutig bestimmt sind. Dazu wählen wir eine entsprechend gebildete Basis aus Vektoren $\big(\varphi^j(\boldsymbol{v}'^{(l)}_k)\big)_{j,k,l}$ und ordnen diese nach dem obigem Schema an, d.h. die Spalten sind Bilder eines Vektors bezüglich der (aufsteigenden) Potenzen $\varphi^j$, und $\varphi$ bildet den jeweils letzten Vektor einer Spalte auf $\mathbf{0}$ ab. Wir drücken nun die Bedingung $\varphi^j(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ in Koordinaten bezüglich $\big(\varphi^j(\boldsymbol{v}'^{(l)}_k)\big)_{j,k,l}$ aus und erhalten für $\ker(\varphi^j)$ eine Basis, die genau aus den letzten $j$ Zeilen der neuen Tabelle gebildet wird. Daher stehen in der $j$-ten Zeile von unten $\dim(V_j) - \dim(V_{j-1}) = \dim(W_j)$ der gegebenen Basisvektoren, und diese Zahlen sind durch $\varphi$ eindeutig bestimmt. ❑

Bei Anwendung von $\varphi^j$ „rücken die Zeilen der Tabelle $j$ Schritte nach unten.“

Die invarianten Unterräume $U_i$ aus dem Satz zeichnen sich durch die folgende Eigenschaft aus. 5/3/7

**Bemerkung – Definition.** (*zyklischer Unterraum*)

Ist $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$, so ist für $\boldsymbol{v} \in V$ die Menge

$$K[\varphi]\cdot \boldsymbol{v} := \{(f(\varphi))(\boldsymbol{v}) \mid f \in K[X]\}$$

ein $\varphi$-invarianter Unterraum; solche Unterräume heißen *$\varphi$-zyklisch*.

Das Einsetzen von $\varphi$ in Polynome ist durch den Homomorphismus $K[X] \to \mathrm{End}_K(V)$, $X \mapsto \varphi$ von $K$-Algebren beschrieben.

Ist $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$, so existiert wegen $\dim_K(V) < \infty$ eine größte Zahl $m$, für die $\mathcal{B} = \big(\boldsymbol{v}, \varphi(\boldsymbol{v}), \varphi^2(\boldsymbol{v}), \ldots, \varphi^{m-1}(\boldsymbol{v})\big)$ linear unabhängig ist. Induktiv ist zu sehen, dass $\{\varphi^k(\boldsymbol{v}) \mid k \in \mathbb{N}\}$ in der linearen Hülle dieser Vektoren liegt. $\mathcal{B}$ bildet daher eine Basis des Unterraumes $U = K[\varphi]\cdot \boldsymbol{v}$, die auch *zyklische Basis* genannt wird.

Alle Vektoren $\boldsymbol{w}$ des zyklischen Unterraumes $U$ mit $U = K[\varphi]\cdot \boldsymbol{w}$ heißen *zyklische Erzeugende* des Paares $(U, \varphi|_U)$. Die Zahl $m = \dim(U)$ wird gelegentlich auch *Länge des zyklischen Vektors* $\boldsymbol{w}$ genannt.

Der Begriff *zyklische Erzeugende* wird durch den der sog. *Moduln über dem Ring* $K[X]$ gerechtfertigt; dies wird jedoch hier nicht verwendet.

Wir weisen darauf hin, dass zyklische Erzeugende (außer für $\dim(U) = 1$) keine Erzeugenden des Untervektorraumes $U$ sind; diese scheinbar unzweckmäßige Bezeichnung hat ihren Ursprung in einem Begriff der Algebra, der den des Vektorraumes verallgemeinert.
Im Satz 5/3/6 bilden (mit den dort verwendeten Notationen) die Vektoren $\boldsymbol{v}_{i1} \in U_i$ zyklische Erzeugende der Paare $(U_i, \varphi|_{U_i})$. ❑

Bezeichnet $\varphi_{n_i} : K^{n_i} \to K^{n_i}$ denjenigen Endomorphismus des Standardraumes, der für $j < n_i$ den Basisvektor $\boldsymbol{e}_j$ auf $\boldsymbol{e}_{j+1}$ sowie $\boldsymbol{e}_{n_i}$ auf $\mathbf{0}$ abbildet, dann erhalten wir für beliebig gegebene positive ganze Zahlen $n_1, \ldots, n_p$ durch die äußere direkte Summe einen Homomorphismus 5/3/8

$$\varphi_{n_1} \oplus \ldots \oplus \varphi_{n_p},$$

der bei entsprechender Einbettung der Summanden in $K^n$ einen nilpotenten Endomorphismus

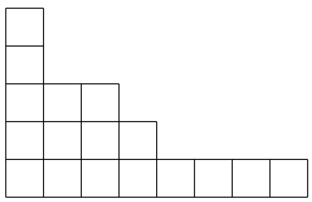
$$\varphi : K^n \to K^n, \quad n := n_1 + \ldots + n_p$$

induziert. Daher kann im Klassifikationssatz 5/3/6 jedes $p$-Tupel $(n_1, \ldots, n_p)$ mit $n_i > 0$, $n_1 + \ldots + n_p = n$ und $n_1 \geq \ldots \geq n_p$ tatsächlich auftreten.

**Definition.** (*Partition*) 5/3/9

Ist $n > 0$ eine natürliche Zahl, so heißt das $p$-Tupel $(n_1, \ldots, n_p) \in \mathbb{N}^p$ eine *Partition* von $n$, falls $n_1 \geq \ldots \geq n_p \geq 1$ und $n_1 + \ldots + n_p = n$ ist.

Eine Partition lässt sich durch ein sog. *Young-Diagramm* veranschaulichen, das $(n_1, \ldots, n_p)$ durch eine „Treppe“ aus jeweils $n_i$ „Kästchen“ an der $i$-ten Position beschreibt. So entspricht z.B. der Partition $(5, 3, 3, 2, 1, 1, 1, 1)$ der Zahl $17$ das Diagramm



5 3 3 2 1 1 1 1

mit insgesamt $5 + 3 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 17$ Kästchen.

**Satz.** *Die Ähnlichkeitsklassen nilpotenter Matrizen in* $\mathrm{M}(n; K)$ *entsprechen umkehrbar eindeutig den Partitionen der Zahl* $n$. *Zu jeder nilpotenten Matrix* $A \in \mathrm{M}(n; K)$ *existiert genau eine ähnliche Blockdiagonalmatrix* 5/3/10

$$J_{(n_1,\ldots,n_p)} = \begin{pmatrix} J_{n_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & J_{n_p} \end{pmatrix}$$

*mit Blöcken*

$$J_{n_i} = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & \mathbf{0} & \\ 0 & 1 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(n_i; K)$$

*längs der Hauptdiagonale, wobei* $(n_1, \ldots, n_p)$ *eine Partition von* $n$ *ist (im Fall* $n_i = 1$ *bezeichnet* $J_1 \in \mathrm{M}(1; K)$ *die Nullmatrix).*
*Insbesondere existieren nur endlich viele Ähnlichkeitsklassen nilpotenter Matrizen in* $\mathrm{M}(n; K)$.

Der hier gefundene, eindeutig bestimmte Repräsentant $J_{(n_1,\ldots,n_p)}$ der Ähnlichkeitsklasse heißt auch *jordansche Normalform der nilpotenten Matrix* $A$.

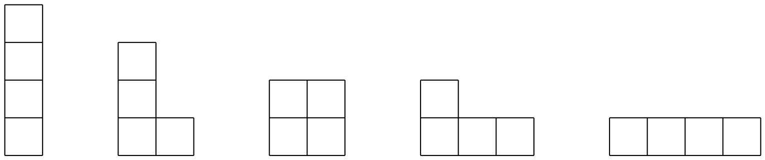
**Beweis des Satzes.** Offenbar genügt es, für den durch $A$ definierten Endomorphismus $\varphi$ des Standardraumes $K^n$ eine Basis $\mathcal{B}$ von $K^n$ gemäß 5/3/6 zu wählen. Dann ist $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = J_{(n_1,\ldots,n_p)}$ für die entsprechende Partition $(n_1, \ldots, n_p)$ von $n = \dim(V)$ und folglich $A$ ähnlich zu $J_{(n_1,\ldots,n_p)}$. Die Eindeutigkeit ist ebenfalls evident. ❏

**Bemerkung.** Zur Bestimmung der zu einem nilpotenten Endomorphismus $\varphi$ gehörigen Partition genügt es, die Folge $\mathrm{rang}(\varphi), \mathrm{rang}(\varphi^2), \mathrm{rang}(\varphi^3), \ldots$ zu kennen (in der natürlich fast überall Nullen stehen). Ist nämlich $V_i = \ker(\varphi^i)$, so folgt nach dem Rangsatz (3/3/21) 5/3/11

$$\begin{aligned} n = \dim(V) &= \dim(V_i) + \mathrm{rang}(\varphi^i), \quad \text{und} \\ \dim(V_i) - \dim(V_{i-1}) &= n - \mathrm{rang}(\varphi^i) - (n - \mathrm{rang}(\varphi^{i-1})) \\ &= \mathrm{rang}(\varphi^{i-1}) - \mathrm{rang}(\varphi^i) \end{aligned}$$

ist die Zahl der Kästchen in der (von unten gezählt) $i$-ten Schicht des zugehörigen Young-Diagramms.

**Beispiel.** Es gibt genau 5 Partitionen der Zahl 4:



4     3 1     2 2     2 1 1     1 1 1 1

Die möglichen Fälle können mit einer Ausnahme bereits durch den Nilpotenzindex unterschieden werden. Da dieser, ebenso wie der Rang einer Matrix, auf einer Ähnlichkeitsklasse konstant ist, ergibt sich aus der Gestalt der entsprechenden Normalformen die folgende Tabelle.

Wir dürfen natürlich nicht erwarten, dass es so einfach aussieht, wenn wir nilpotente Endomorphismen $K^n \to K^n$ mit $n > 4$ untersuchen.

| Klassifikation nilpotenter Endomorphismen $\varphi : K^4 \to K^4$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Partition | $(4)$ | $(3,1)$ | $(2,2)$ | $(2,1,1)$ | $(1,1,1,1)$ |
| Bedingungen | $\varphi^4 = \mathbf{0}$<br>$\varphi^3 \neq \mathbf{0}$ | $\varphi^3 = \mathbf{0}$<br>$\varphi^2 \neq \mathbf{0}$ | $\varphi^2 = \mathbf{0}$<br>$\operatorname{rang}(\varphi) = 2$ | $\varphi^2 = \mathbf{0}$<br>$\operatorname{rang}(\varphi) = 1$ | $\varphi = \mathbf{0}$ |

Wir untersuchen beispielsweise die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & -4 & -1 \\ -5 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(4; \mathbb{R}).$$

Offensichtlich ist

$$A \neq 0, \quad A^2 = 0, \quad \operatorname{rang}(A) = 2,$$

d.h. $A$ ist nilpotent und muss die Normalform $J_{(2,2)}$ haben, die der Partition $(2,2)$ von $4$ entspricht.

Nun soll eine reguläre Matrix $U$ bestimmt werden, für die $U^{-1} \cdot A \cdot U = J_{(2,2)}$ ist. Zur Bestimmung der zyklischen Vektoren berechnen wir zunächst den Kern der zugehörigen linearen Abbildung $\varphi$, der durch die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems mit der Koeffizientenmatrix $A$ gegeben ist. Eine Basis von $\ker(\varphi)$ ist $\big((2,1,0,6),(2,-2,3,0)\big)$. Diese wird durch die Vektoren $\boldsymbol{w}_{11} = (1,0,0,0)$, $\boldsymbol{w}_{12} = (0,1,0,0)$ der kanonischen Basis zu einer Basis von $V$ ergänzt.

Zusammen mit $\boldsymbol{w}_{21} = \varphi(\boldsymbol{w}_{11}) = (-2,4,-5,4)$ und $\boldsymbol{w}_{22} = \varphi(\boldsymbol{w}_{12}) = (4,-2,4,4)$ entsteht eine Basis $\mathcal{B} = (\boldsymbol{w}_{11}, \boldsymbol{w}_{21}, \boldsymbol{w}_{12}, \boldsymbol{w}_{22})$ von $V$, bezüglich der $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ die gesuchte Normalform $B$ besitzt. Werden die Vektoren aus $\mathcal{B}$ als Spalten einer Matrix

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

angeordnet, so erhalten wir durch

$$B = U^{-1} \cdot A \cdot U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

die Normalform von $A$. ❑

Allgemein ergibt sich das folgende

**Rechenverfahren.** (*Normalform einer nilpotenten Matrix*) 5/3/12

$A \in \mathrm{M}(n;K)$ sei nilpotent. $V_i \subseteq K^n$ bezeichne den Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems $A^i \cdot x = 0$,

$$\mathbf{0} = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{q-1} \subset V_q = V := K^n.$$

1. Schritt:

Bestimmung der Potenzen $A^i$ ($i = 1, 2, \ldots$) und damit der Zahl

$$q := \min\{i \in \mathbb{N} \mid A^i = 0\}.$$

Durch sukzessive Ergänzung wird eine Basis $(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ von $V$ bestimmt, für die $(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_{d_j})$ Basis von $V_j$ ist, $d_j = \dim(V_j)$, $j = 1, \ldots, q$. Diese Basen stehen nun in jedem der folgenden Schritte zur Verfügung.

2. Schritt:

Ergänzung einer Basis von $V_{q-1}$ durch Vektoren

$$\boldsymbol{w}_{11}, \boldsymbol{w}_{12}, \ldots, \boldsymbol{w}_{1 i_q}$$

zu einer Basis des Vektorraumes $V_q = V$ (wir wählen die bereits unter 1. gefundenen Vektoren $\boldsymbol{b}_{d_{q-1}+1}, \ldots, \boldsymbol{b}_{d_q}$).

3. Schritt:

Wahl einer Basis von $V_{q-2}$ und Ergänzung durch Vektoren $\boldsymbol{w}_{21}, \boldsymbol{w}_{22}, \ldots, \boldsymbol{w}_{2\, i_{q-1}}$ zu einer Basis von $V_{q-1}$, wobei die linear unabhängigen Vektoren

$$\underbrace{{}^{\mathrm{t}}(A \cdot {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{w}_{11})}_{\boldsymbol{w}_{21}}, \underbrace{{}^{\mathrm{t}}(A \cdot {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{w}_{12})}_{\boldsymbol{w}_{22}}, \ldots \in V_{q-1}$$

als erste angeordnet werden (wir wenden das Austauschverfahren auf die genannten Vektoren und $\boldsymbol{b}_{d_{q-2}+1}, \ldots, \boldsymbol{b}_{d_{q-1}}$ an).

$$\vdots$$

i-ter Schritt ($i \le q$):

Wahl einer Basis von $V_{q-i+1}$ und Ergänzung durch Vektoren $\boldsymbol{w}_{i-1\,1}, \boldsymbol{w}_{i-1\,2}, \ldots, \boldsymbol{w}_{i-1\, i_{q-i+2}}$ zu einer Basis von $V_{q-i+2}$, wobei die linear unabhängigen Vektoren

$$\underbrace{{}^{\mathrm{t}}(A \cdot {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{w}_{i-1\,1})}_{\boldsymbol{w}_{i-1\,1}}, \underbrace{{}^{\mathrm{t}}(A \cdot {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{w}_{i-1\,2})}_{\boldsymbol{w}_{i-1\,2}}, \ldots \in V_{q-i+2}$$

als erste angeordnet werden (wir wenden das Austauschverfahren auf die genannten Vektoren und $\boldsymbol{b}_{d_{q-i+1}+1}, \ldots, \boldsymbol{b}_{d_{q-i+2}}$ an).

$(q+1)$-ter Schritt:

Wahl einer Basis aus Vektoren $\boldsymbol{w}_{q1}, \boldsymbol{w}_{q2}, \ldots, \boldsymbol{w}_{q\, i_1}$ von $V_1$, in der die Vektoren

$$\underbrace{{}^{\mathrm{t}}(A \cdot {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{w}_{q-1\,1})}_{\boldsymbol{w}_{q1}}, \underbrace{{}^{\mathrm{t}}(A \cdot {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{w}_{q-1\,2})}_{\boldsymbol{w}_{q2}}, \ldots \in V_1$$

als erste vorkommen (wir wenden das Austauschverfahren auf die genannten Vektoren und $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_{d_1}$ an).

Die Vektoren $\boldsymbol{w}_{ij}$ bilden eine Basis von $V$; wir veranschaulichen das Resultat durch das zugehörige Young-Diagramm.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{w}_{11}$ | $\boldsymbol{w}_{12}$ | $\dots$ | $\boldsymbol{w}_{1i_q}$ | | | | | |
| $\boldsymbol{w}_{21}$ | $\boldsymbol{w}_{22}$ | $\dots$ | $\boldsymbol{w}_{2i_q}$ | $\boldsymbol{w}_{2i_q+1}$ | $\dots$ | $\boldsymbol{w}_{2i_{q-1}}$ | | |
| $\boldsymbol{w}_{31}$ | $\boldsymbol{w}_{32}$ | $\dots$ | $\boldsymbol{w}_{3i_q}$ | $\boldsymbol{w}_{3i_q+1}$ | $\dots$ | $\boldsymbol{w}_{3i_{q-1}}$ | $\dots$ | |
| $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | | |
| $\boldsymbol{w}_{q1}$ | $\boldsymbol{w}_{q2}$ | $\dots$ | $\boldsymbol{w}_{qi_q}$ | $\boldsymbol{w}_{qi_q+1}$ | $\dots$ | $\boldsymbol{w}_{qi_{q-1}}$ | $\dots$ | $\boldsymbol{w}_{q\,i_1}$ |

Es ergibt sich mit

$$U := ({}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{w}_{11}, {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{w}_{21}, {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{w}_{31}, \dots, {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{w}_{q1}, {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{w}_{12}, \dots, {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{w}_{q\,i_1}) \in \mathrm{GL}(n; K)$$

die Normalform $U^{-1} \cdot A \cdot U$ der nilpotenten Matrix $A$.

# Schwerpunkte zum gewählten Stoff

- Charakterisierung nilpotenter Endomorphismen und (entsprechend) nilpotenter Matrizen [5/3/1 – 5/3/5]
- Klassifikation der nilpotenten Endomorphismen [5/3/6]
- Zyklische Unterräume und zyklische Vektoren [5/3/7]
- Partitionen und Ähnlichkeitsklassen nilpotenter Matrizen [5/3/8 – 5/3/11]
- Rechnerische Bestimmung der Normalform einer nilpotenten Matrix [5/3/12]