Metrische Hauptachsengleichungen für Quadriken

6/3/18

Wir betrachten die Quadrik im euklidischen affinen Standardraum $\mathbb{R}^n$, die durch die Gleichung $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ gegeben ist, wobei

$$f = \sum_{i,j;i \le j} \alpha_{ij} X_i X_j + 2 \sum_i a_i X_i + a_0 \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$$

Apollonius von Perge (2. Jahrhundert v.u.Z) befasste sich in einem umfangreichen Werk mit Quadriken.

mit $\alpha_{ij}, a_i \in \mathbb{R}$ ein Polynom vom vollständigen Grad 2 ist. Gesucht wird ein orthonormales Koordinatensystem, in dem die Gleichung eine ähnlich einfache Gestalt annimmt wie in der affinen Geometrie (vgl. 6/1/30). Da die Gruppe der zulässigen Koordinatentransformationen kleiner ist, kann dasselbe Ergebnis nicht erwartet werden; so lässt sich z.B. ein Kreis durch eine längentreue Abbildung sicher nicht in eine beliebige Ellipse überführen.

Idee. Auf dem euklidischen Standardvektorraum $V = \mathbb{R}^n$ lässt sich die zu f gehörige Abbildung $V \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x})$ als

$$f(\boldsymbol{x}) = <\boldsymbol{x}, \varphi(\boldsymbol{x})> + 2<\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}> + a_0$$

beschreiben, wobei φ ein selbstadjungierter Endomorphismus, $\boldsymbol{a}$ ein Vektor sowie a_0 eine Zahl ist. Die Spektralzerlegung zeigt $V = \operatorname{im}(\varphi) \oplus \ker(\varphi)$. Bezeichnet $\pi : V \to V$ die orthogonale Projektion auf $\ker(\varphi)$ und $\boldsymbol{a}' := \pi(\boldsymbol{a})$, so folgt $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}' \in \operatorname{im}(\varphi)$. Wir wählen $\boldsymbol{b} \in V$ mit $\varphi(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}'$, d.h. $\boldsymbol{a} = \varphi(\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{a}'$. Da φ selbstadjungiert ist, gilt

Wir wollen zunächst erreichen, dass $\boldsymbol{a} \perp \operatorname{im}(\varphi)$.

$$f(\boldsymbol{x}) = <\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}, \varphi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b})> + 2<\boldsymbol{a}', \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}> + a_0',$$

mit $a_0' = a_0 - <\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}>$. Wählen wir eine geeignete Orthonormalbasis, so wird für $\boldsymbol{y} := \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ der erste Teil eine Vielfachensumme von Quadraten affiner Koordinaten y_i. Ist $\boldsymbol{a}' \neq \boldsymbol{0}$, so lässt sich die Orthonormalbasis sogar so wählen, dass $\boldsymbol{a}'$ Vielfaches eines der Basisvektoren ist. Dadurch ergibt sich – bis auf Koeffizienten der Quadrate, die sich im Allgemeinen nicht beseitigen lassen – ein Resultat, das dem affinen Fall entspricht. ❑

... leicht nachzurechnen, wobei die Selbstadjungiertheit von φ zu beachten ist.

Satz. (*metrische Hauptachsengleichungen für Quadriken*) 6/3/19

Jede nichtleere Quadrik im euklidischen affinen Standardraum $\mathbb{R}^n$ ist nach geeigneter orthonormaler Koordinatentransformation Lösungsmenge einer der folgenden Gleichungen

(a) $\dfrac{x_1^2}{c_1^2} + \dots + \dfrac{x_p^2}{c_p^2} - \dfrac{x_{p+1}^2}{c_{p+1}^2} - \dots - \dfrac{x_r^2}{c_r^2} = 0\,, \quad r \le 2p\,,\ 1 \le r \le n\,,$

(b) $\dfrac{x_1^2}{c_1^2} + \dots + \dfrac{x_p^2}{c_p^2} - \dfrac{x_{p+1}^2}{c_{p+1}^2} - \dots - \dfrac{x_r^2}{c_r^2} = 1\,, \quad p \ge 1\,,\ 1 \le r \le n\,,$

(c) $\dfrac{x_1^2}{c_1^2} + \dots + \dfrac{x_p^2}{c_p^2} - \dfrac{x_{p+1}^2}{c_{p+1}^2} - \dots - \dfrac{x_r^2}{c_r^2} = 2x_{r+1}\,, \quad r \le 2p\,,\ 1 \le r \le n-1\,,$

wobei $c_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $p, r \in \mathbb{N}$ geeignete Zahlen bezeichnen.

Wer sein Leben damit verbringt, Hauptachsengleichungen für Quadriken zu bestimmen, findet sicher angenehmere Methoden als die anschließend beschriebene, beispielsweise unter Verwendung eines Computeralgebrasystems. Das nachfolgend angegebene Verfahren beweist gleichzeitig den Satz.

Rechenverfahren. (*Bestimmung einer Hauptachsengleichung*) 6/3/20

Gegeben ist das quadratische Polynom $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, gesucht ein orthonormales Koordinatensystem im affinen euklidischen Standardraum $\mathbb{R}^n$, für das die Nullstellenmenge $\mathrm{V}(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ durch eine der angegebenen Hauptachsengleichungen beschrieben wird.

Beispiele mit ausführlichen Lösungen nach diesem Verfahren finden sich in der Aufgabensammlung.

0. Schritt: Bestimmung der zugehörigen symmetrischen Matrix

Für $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir $f(x_1, \dots, x_n)$ in der Form

$$(\, x_1 \, \dots \, x_n \,) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + 2 < \boldsymbol{a}, (x_1, \dots, x_n) > + \, a_0 \, ,$$

$A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n; \mathbb{R})$, $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $a_0 \in \mathbb{R}$, so dass $2a_{ij} = 2a_{ji} = \alpha_{ij}$ für $i < j$ und $a_{ii} = \alpha_{ii}$ mit den Bezeichnungen aus 6/3/18.

1. Schritt: Spektralzerlegung

Wir bestimmen die (hier mit ihren Multiplizitäten aufgeführten) Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ der Matrix A und ordnen sie so, dass $\lambda_i \neq 0$ ist für $i \leq r$ sowie $\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0$. Nun finden wir normierte, paarweise orthogonale Vektoren $\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_r$, für die $\boldsymbol{b}_i$ ein Eigenvektor zu λ_i ist. Falls 0 nicht als Eigenwert auftritt, muss $r = n$ sein und es folgt der nächste Schritt 2.
Anderenfalls bezeichnen wir mit π die orthogonale Projektion von $\mathbb{R}^n$ auf den Eigenraum V_0 zum Eigenwert 0 und erhalten

$$\pi(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a} - < \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_1 > \boldsymbol{b}_1 - \dots - < \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_r > \boldsymbol{b}_r \, .$$

Fall (i) $\pi(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$:

Es wird eine beliebige Orthonormalbasis $\boldsymbol{b}_{r+1}, \dots, \boldsymbol{b}_n$ von V_0 bestimmt; dann ist $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)$ eine Orthonormalbasis des Standardraumes $\mathbb{R}^n$, die aus Eigenvektoren zu A besteht.

Dabei erinnern wir uns an die parsevalsche Gleichung.

Fall (ii) $\pi(\boldsymbol{a}) \neq \boldsymbol{0}$:

$\boldsymbol{a}' := \pi(\boldsymbol{a}) \in V_0 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 0. Wir wählen $\boldsymbol{b}_{r+1} := \| \boldsymbol{a}' \|^{-1} \cdot \boldsymbol{a}'$, ergänzen diesen Vektor durch $\boldsymbol{b}_{r+2}, \dots, \boldsymbol{b}_n$ zu einer Orthonormalbasis von V_0 und setzen $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)$; dies ist wieder eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren zu A.

V_0, ist Kern der zu A gehörigen linearen Abbildung.

2. Schritt: Koordinatentransformation

Mit $U = ({}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{b}_1, \dots, {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{b}_n)$ wird die Übergangsmatrix von $\mathcal{B}$ zur kanonischen Basis bezeichnet, mit $(y_1, \dots, y_n)$ das Koordinatentupel von $(x_1, \dots, x_n)$ bezüglich $\mathcal{B}$. Die Koordinatentransformation ist dann durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = U \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} ,$$

gegeben, und es gilt

... orthonormaler Basiswechsel.

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \, y_i^2 + 2 \underbrace{< (a_1, \dots, a_n) \cdot U, (y_1, \dots, y_n) >}_{< \boldsymbol{a} \, , \boldsymbol{x} >} + \, a_0 \, .$$

Der lineare Term kann hier noch y_i mit $i \leq r$ enthalten.

3. Schritt: Quadratische Ergänzung

Durch $z_i := y_i + d_i$ wird (mit geeigneten Zahlen $d_i \in \mathbb{R}$) der nichtkonstante Teil von $f(x_1, \dots, x_n)$ in eine Vielfachensumme der Quadrate y_i^2 ($i \leq r$) sowie der y_j mit $j > r$ überführt. Im Fall 1. (i) tritt kein linearer Term auf, anderenfalls folgt: Die Koeffizienten von y_j im linearen Teil sind (bis auf den Faktor 2) die Zahlen $< \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_j > = 0$ für $j = r+2, \dots, n$ sowie $< \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_{r+1} > = < \boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}_{r+1} > = \| \boldsymbol{a}' \|$. Wir erhalten

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i z_i^2 + [2a'_{r+1} y_{r+1}] + \, a'_0 \, ,$$

wobei der mit [ ] hervorgehobene Term für $r = n$ zu streichen ist.

... wieder nach der parsevalschen Gleichung. Dabei ist $< \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_{r+1} >$ nur von der Projektion auf $V_0 = \mathbb{R}\boldsymbol{b}_{r+1} + \dots + \mathbb{R}\boldsymbol{b}_n$ abhängig.

4. Schritt: Transformation des linearen Terms

Ist $r = n$ oder $a'_{r+1} = 0$, so setzen wir $z_j := y_j$ für $n \geq j > r$ und erhalten

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i z_i^2 + a'_0$$

als Vielfachensumme der z_i^2 sowie einer Konstanten.
Im verbleibenden Fall mit $a'_{r+1} \neq 0$ wählen wir $z_j := y_j$ für $j = r+2, \dots, n$ und $z_{r+1} := y_{r+1} + \dfrac{a'_0}{2a'_{r+1}}$; es ergibt sich

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \, {z_i}^2 + a'_{r+1} z_{r+1} \,.$$

Wird $f(x_1, \dots, x_n)$ in den neuen Koordinaten $(z_1, \dots, z_n)$ aufgeschrieben, so können wir nach Multiplikation mit einer Konstanten $\neq 0$ eine dem Satz entsprechende Hauptachsengleichung ablesen. ❑

Im Allgemeinen heißen Quadriken des im Satz mit (a) bezeichneten Typs quadratische Kegel, während solche der Typen (b), (c) als echte Mittelpunktsquadriken bzw. als Paraboloide bezeichnet werden.
Nachfolgend sind bis auf Isometrie Gleichungen für die nichttrivialen Quadriken in der euklidischen affinen Ebene angegeben.

metrische Hauptachsengleichungen zweidimensionaler Quadriken (außer für Teilmengen einer Geraden)		
Gleichung	Typ	Name
$\frac{x_1^2}{c_1^2} - \frac{x_2^2}{c_2^2} = 0$	(a)	zwei Geraden mit einem Schnittpunkt
$\frac{x_1^2}{c_1^2} = 1$	(b)	Paar paralleler Geraden
$\frac{x_1^2}{c_1^2} + \frac{x_2^2}{c_2^2} = 1$	(b)	Ellipse (Kreis im Fall $c_1 = c_2$)
$\frac{x_1^2}{c_1^2} - \frac{x_2^2}{c_2^2} = 1$	(b)	Hyperbel
$\frac{x_1^2}{c_1^2} - 2x_2 = 0$	(c)	Parabel

Die nächste Tabelle listet die Fälle der Dimension 3 auf.
Dabei sind einige der Bezeichnungen in speziellen Situationen zu modifizieren; ist z.B. $c_1 = c_2 = c_3$, so verwenden wir für ein Ellipsoid vorzugsweise die Bezeichnung Kugel usw.

Der Tradition folgend, sollten in einem Text zur linearen Algebra nun Bilder der dreidimensionalen Quadriken folgen.
Hier dagegen wird der Leser eingeladen, sich selbst ein Bild zu machen. Eine sehr gute Vorstellung lässt sich gewinnen, indem die Schnitte der Normalformen mit geeigneten Ebenen bestimmt werden. Sind diese z.B. senkrecht zu einer der Koordinatenachsen gewählt oder so, dass sie eine Koordinatenachse enthalten, dann wird klar, wie passende Namen zustande kommen.

Beispiel. (*Computergrafik einer Sattelfläche*)

Auf Ihrem Rechner sollte dazu das Programm SURF von STEPHAN ENDRASS et. al. installiert sein.

Wer eine noch mehr auf sinnliche Wahrnehmung ausgerichete Darstellung wünscht, ist eingeladen, die Flächen mit dem Computeralgebrasystem seiner Wahl zu zeichnen. Hier folgt ein Vorschlag für einen Aufruf von SURF[1] unter SINGULAR (LINUX-Version).

```
ring r=0,(x,y,z),dp;
poly f=x2-y2-z; // veranschaulichung der sattelflaeche
LIB "surf.lib";
plot(f);
```

Ansichten von verschiedenen Seiten und Variation der Koeffizienten vermitteln dabei einen noch besseren Eindruck.

Nachfolgend wird eine Möglichkeit angegeben, wie diese Aufgabe mit MuPAD gelöst werden kann.

MuPAD bietet eine Vielzahl von Varianten, auf die hier nicht eingegangen werden kann.

```
g:=plot::Function3d(x^2-y^2, x=-1..1, y=-1..1);
plot(g);
```

Dabei wird die „Parametrisierung“ $z = x^2 - y^2$ der vorliegenden Fläche verwendet. Für die Darstellung eines Abbildungsgraphen (wie zuvor) stehen unter MuPAD andere Mittel zur Verfügung. ❏

[1] Endraß, S., Hülf, H., Örtel, R., Schneider, K., Schmitt, R., Beigel, J., *Surf - visualization of algebraic curves and surfaces.* http://surf.sourceforge.net 1997-2000

metrische Hauptachsengleichungen dreidimensionaler Quadriken (außer für Teilmengen einer Ebene)		
Gleichung	Typ	Name
$\frac{x_1^2}{c_1^2} + \frac{x_2^2}{c_2^2} - \frac{x_3^2}{c_3^2} = 0$	(a)	Kegel
$\frac{x_1^2}{c_1^2} - \frac{x_2^2}{c_2^2} = 0$		zwei sich schneidende Ebenen
$\frac{x_1^2}{c_1^2} + \frac{x_2^2}{c_2^2} + \frac{x_3^2}{c_3^2} = 1$	(b)	Ellipsoid
$\frac{x_1^2}{c_1^2} + \frac{x_2^2}{c_2^2} - \frac{x_3^2}{c_3^2} = 1$		einschaliges Hyperboloid
$\frac{x_1^2}{c_1^2} - \frac{x_2^2}{c_2^2} - \frac{x_3^2}{c_3^2} = 1$		zweischaliges Hyperboloid
$\frac{x_1^2}{c_1^2} + \frac{x_2^2}{c_2^2} = 1$		elliptischer Zylinder
$\frac{x_1^2}{c_1^2} - \frac{x_2^2}{c_2^2} = 1$		hyperbolischer Zylinder
$\frac{x_1^2}{c_1^2} = 1$		Paar paralleler Ebenen
$\frac{x_1^2}{c_1^2} + \frac{x_2^2}{c_2^2} - 2x_3 = 0$	(c)	elliptisches Paraboloid
$\frac{x_1^2}{c_1^2} - \frac{x_2^2}{c_2^2} - 2x_3 = 0$		hyperbolisches Paraboloid (Sattelfläche)
$\frac{x_1^2}{c_1^2} - 2x_2 = 0$		parabolischer Zylinder