© M. Roczen und H. Wolter
Preview zur aktuellen Fassung:
Lineare Algebra individuell
Online Ver. 0.52, 15.6.2005
Alle Rechte vorbehalten

6.1 Affine Räume

Affine Quadriken

Die Untersuchung von Quadriken im affinen (bzw. im später behandelten affinen euklidischen) Fall gehört zu den klassischen Themen der Geometrie. In dieser eher algebraisch motivierten Darstellung begnügen wir uns zunächst damit zu zeigen, wie sich mittels affiner Koordinatentransformation über dem reellen und dem komplexen Grundkörper eine übersichtliche Liste von Gleichungen für die Nullstellenmengen quadratischer Polynome angeben lässt.

Wir wählen einen zunächst beliebigen Grundkörper K, dessen Charakteristik von 2 verschieden ist. Unter einer *quadratischen Hyperfläche,* kurz *Quadrik* im affinen Standardraum K^n verstehen wir die Nullstellenmenge $Q = \mathrm{V}(f) \subseteq K^n$ eines Polynoms $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$, dessen vollständiger Grad 2 ist, d.h.

$$f = \sum_{1 \le i \le j \le n} f_{ij} X_i X_j + \sum_{i=1}^{n} f_i X_i + f_0$$

mit $f_{ij}, f_i \in K$ und $f_{ij} \neq 0$ für wenigstens ein Indexpaar (i,j). Die zugehörige Abbildung ist also Summe einer quadratischen Form, einer Linearform und einer Konstanten. Unsere bisherigen Kenntnisse erlauben es bereits, durch Koordinatentransformation die Terme von f zu vereinfachen. Dazu wählen wir zunächst eine symmetrische Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n;K)$, so dass $\sum_{i,j,\, i \le j} f_{ij} X_i X_j = \sum_{i,j} a_{ij} X_i X_j$ ist ($a_{ii} = f_{ii}$ und $2a_{ij} = 2a_{ji} = f_{ij}$ für $i < j$). Es ergibt sich

$$f = (\, X_1 \ \ldots \ X_n \,) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} + 2\,(\, b_1 \ \ldots \ b_n \,) \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} + c$$

mit $2b_i = f_i$ und $c = f_0$. Wir können nun Eigenschaften symmetrischer Bilinearformen verwenden. Mittels Diagonalisierung (vgl. 4/3/7) finden wir eine Matrix $W \in \mathrm{GL}(n;K)$, für die ${}^{\mathrm{t}}W \cdot A \cdot W$ diagonal ist. Aus

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} := W^{-1} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

erhalten wir daher

$$f = (\, Y_1 \ \ldots \ Y_n \,) \cdot {}^{\mathrm{t}}W \cdot A \cdot W \cdot \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} + 2\,(\, b_1 \ \ldots \ b_n \,) \cdot W \cdot \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} + c,$$

d.h. mit geeigneten Zahlen $r > 0$, $a'_i, b'_i \in K$ und $a'_i \neq 0$

$$f = \sum_{i=1}^{r} a'_i {Y_i}^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} b'_i Y_i + c,$$

wobei o.B.d.A. angenommen wurde, dass die von 0 verschiedenen Diagonaleinträge der Matrix ${}^{\mathrm{t}}W \cdot A \cdot W$ entsprechend angeordnet sind. Quadratische Ergänzung ergibt

$$f = \sum_{i=1}^{r} a'_i \cdot \left(Y_i + \frac{b'_i}{a'_i} \right)^2 + 2 \sum_{i=r+1}^{n} b'_i Y_i + c', \quad \text{wobei} \quad c' := c - \sum_{i=1}^{r} \frac{{b'_i}^2}{{a'}_i^2}\,.$$

In Abhängigkeit davon, ob der lineare oder der konstante Term hierbei verschwindet, erhalten wir die folgenden Fälle.

(1) Tritt kein linearer Term auf (d.h. $r = n$ oder $b'_{r+1} = \ldots = b'_n = 0$), so ergibt sich mittels

$$Z_i := Y_i + \frac{b'_i}{a'_i} \text{ für } i \leq r \text{ und } Z_i := Y_i \text{ für } i > r$$

$$f = \sum_{i=1}^{r} a'_i {Z_i}^2 + c'.$$

(2) Im Fall eines von 0 verschiedenen linearen Terms kann o.B.d.A. angenommen werden, dass $b'_{r+1} \neq 0$ ist. Dann wird f mittels

$$Z_i := Y_i + \frac{b'_i}{a'_i} \text{ für } i \leq r \text{ und } Z_{r+1} := -\sum_{i=r+1}^{n} b'_i Y_i - \frac{c'}{2},$$

$$Z_i := Y_i \text{ für } i > r+1$$

in das Polynom

$$f = \sum_{i=1}^{r} a'_i {Z_i}^2 - 2Z_{r+1}.$$

überführt.

Weiter wollen wir die Multiplikation von f mit einer Zahl $\neq 0$ zulassen, denn dadurch ändert sich die Nullstellenmenge dieses Polynoms nicht.
Tritt nun unter (1) eine von 0 verschiedene Konstante c' auf, so kann diese durch -1 ersetzt werden.

Über speziellen Grundkörpern lässt sich die Gestalt des Polynoms f weiter vereinfachen. Es sei zunächst $K = \mathbb{C}$. Eine Transformation vom Typ $U_i = d_i Z_i$ mit Konstanten $d_i \in \mathbb{C}^*$, $d_i^2 = a'_i$ ergibt, dass die Koeffizienten a'_i o.B.d.A. durch 1 ersetzt werden können.

Resultat A. (*Hauptachsenpolynome komplexer Quadriken*) 6/1/29

Jede Quadrik $Q \subseteq \mathbb{C}^n$ lässt sich nach geeigneter affiner Koordinatentransformation als Nullstellenmenge $Q = \mathrm{V}(f)$ eines der folgenden Polynome $f \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ beschreiben, die wir als (komplexe) affine Hauptachsenpolynome bezeichnen.

(a) $f = X_1^2 + \ldots + X_r^2$

(b) $f = X_1^2 + \ldots + X_r^2 - 1$

(c) $f = X_1^2 + \ldots + X_r^2 - 2X_{r+1}$

Unter Beachtung von Vorzeichen der Koeffizienten und nach Ausschluss der Polynome mit leerer Nullstellenmenge ergibt sich im reellen Fall das

Resultat B. (*Hauptachsenpolynome reeller Quadriken*) 6/1/30

Jede nichtleere Quadrik $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ lässt sich nach geeigneter affiner Koordinatentransformation als Nullstellenmenge $Q = \mathrm{V}(f)$ eines der folgenden Polynome $f \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ beschreiben, die wir als (reelle) affine Hauptachsenpolynome bezeichnen.

(a) $f = X_1^2 + \ldots + X_p^2 - X_{p+1}^2 - \ldots - X_r^2\,,\ \ r \leq 2p\,,\ 1 \leq r \leq n$

(b) $f = X_1^2 + \ldots + X_p^2 - X_{p+1}^2 - \ldots - X_r^2 - 1\,,\ \ p \geq 1\,,\ 1 \leq r \leq n$

(c) $f = X_1^2 + \ldots + X_p^2 - X_{p+1}^2 - \ldots - X_r^2 - 2X_{r+1}, \quad r \leq 2p\,,\ 1 \leq r \leq n-1$

In der folgenden Tabelle wird für einen speziellen Fall angegeben, was dies im anschaulich-geometrischen Sinn bedeutet.

reelle Hauptachsenpolynome für Quadriken in der Dimension 2		
Polynom $f \in K[X_1, X_2]$	Typ	Beschreibung, Name für $Q = V(f)$
X_1^2	(a)	(doppelte) Gerade
$X_1^2 + X_2^2$		Punkt
$X_1^2 - X_2^2$		zwei Geraden mit einem Schnittpunkt
$X_1^2 - 1$	(b)	Paar paralleler Geraden
$X_1^2 + X_2^2 - 1$		Kreis
$X_1^2 - X_2^2 - 1$		Hyperbel
$X_1^2 - 2X_2$	(c)	Parabel

Wie für quadratische Formen eignet sich auch hier die Methode der quadratischen Ergänzung zum praktischen Auffinden eines Hauptachsenpolynoms und der entsprechenden Koordinatentransformation.

Beispiel. In $\mathbb{R}[X_1, X_2, X_3]$ untersuchen wir das quadratische Polynom

$$f = -X_1^2 + 2X_1X_2 - 2X_2^2 + 4X_1X_3 - 6X_2X_3 - 5X_3^2 + 2X_3 - 4.$$

Durch quadratische Ergänzung folgt

$$\begin{aligned} f &= -(X_1 - X_2 - 2X_3)^2 - X_2^2 - 2X_2X_3 - X_3^2 + 2X_3 - 4 \\ &= -(X_1 - X_2 - 2X_3)^2 - (X_2 + X_3)^2 + 2X_3 - 4, \end{aligned}$$

d.h. mittels der Substitution

$$Y_1 := X_1 - X_2 - 2X_3, \quad Y_2 := X_2 + X_3, \quad Y_3 := X_3$$

erhält das gegebene Polynom die Gestalt

$$f = -Y_1^2 - Y_2^2 + 2Y_3 - 4.$$

Nach Transformation des Koordinatenursprungs mittels

$$Z_1 := Y_1, \quad Z_2 := Y_2, \quad Z_3 := Y_3 - 2$$

ergibt sich

$$f = -Z_1^2 - Z_2^2 + 2Z_3.$$

Multiplikation mit -1 überführt f in das Hauptachsenpolynom

$$-f = Z_1^2 + Z_2^2 - 2Z_3.$$

Durch Einsetzen erhalten wir die zugehörige affine Transformation

$$Z_1 = X_1 - X_2 - 2X_3, \quad Z_2 = X_2 + X_3, \quad Z_3 = X_3 - 2. \qquad \square$$

Schwerpunkte zum gewählten Stoff

- Affine Hauptachsenpolynome reeller und komplexer Quadriken [6/1/28 – 6/1/30]
- Auffinden des Hauptachsenpolynoms einer affinen Quadrik durch quadratische Ergänzung [6/1/28 – 6/1/30]

Sachverzeichnis

A
affine
– Quadrik [6/1/28], 1

H
Hauptachsenpolynome
– komplexer Quadriken [6/1/29], 2
– reeller Quadriken [6/1/30], 2

Q
quadratische Hyperfläche [6/1/28], 1
Quadriken
– affine Formen [6/1/28], 1