Kapitel 6

Geometrie

Im weiten Feld der Geometrie befassen wir uns hier zunächst mit dem Begriff des affinen Raumes; er kommt dem Raum unserer Anschauung näher als der des Vektorraumes, in dem stets ein ausgezeichnetes Element (der Nullvektor) existiert, während nun alle Punkte gleichermaßen als *Koordinatenursprung* geeignet sind. Vektoren treten in diesem Zusammenhang als Verschiebungen von Punkten auf.
Beginnend mit dem zweiten Abschnitt beschränken wir uns auf die Grundkörper der komplexen und reellen Zahlen – in diesem Fall wird eine Abstandsmessung eingeführt. Insbesondere untersuchen wir *orthogonale Abbildungen* und *Quadriken.*
Unter geometrischen Eigenschaften räumlicher Objekte verstehen wir solche, die gegenüber bestimmten *Gruppen von Transformationen* invariant bleiben, zunächst gegenüber der *affinen Gruppe,* in der euklidischen Geometrie gegenüber der Gruppe der *Bewegungen*. Letztere erhalten insbesondere *Längen* und *Winkel*, während *eigentliche Bewegungen* darüber hinaus auch die Orientierung erhalten. Geometrie wird so zum Studium eines Raumes zusammen mit einer Transformationsgruppe. Dieser Standpunkt geht auf das *Erlanger Programm* von Felix Klein aus dem Jahr 1872 zurück.
Zum Abschluss des Kapitels wird gezeigt, wie die jordansche Normalform unter Verwendung einer Abstandsmessung auf dem Endomorphismenraum zu ersten Resultaten über *lineare dynamische Systeme* führt.

6.2 Euklidische und unitäre Räume

Von diesem Abschnitt an beschränken wir uns auf die Grundkörper der reellen 6/2/1
oder der komplexen Zahlen; für die betrachteten Vektorräume bzw. affinen Räume wird stillschweigend vorausgesetzt, dass ihre Dimension endlich ist. Um unnötige Fallunterscheidungen zu vermeiden, wird für jeden der Körper $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ das Symbol $\mathbb{K}$ verwendet und nur bei Bedarf der konkrete Grundkörper angegeben.

Definition. (*Sesquilinearform*)

V sei ein komplexer Vektorraum.

(1) Ein Gruppenhomomorphismus $\varphi : V \to W$ der additiven Gruppe von V in die additive Gruppe eines $\mathbb{C}$-Vektorraumes W heißt *semilineare Abbildung,* wenn für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ und alle $\boldsymbol{v} \in V$ gilt $\varphi(\alpha\boldsymbol{v}) = \overline{\alpha}\varphi(\boldsymbol{v})$.

(2) Eine Abbildung $s : V \times V \to \mathbb{C}$ heißt *sesquilinear* (auch *Sesquilinearform*) auf V, falls die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind.

(i) Für alle $\boldsymbol{w} \in V$ ist
$$s(\ ,\boldsymbol{w}) : V \to \mathbb{C}\,, \quad \boldsymbol{x} \mapsto s(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})$$
eine semilineare Abbildung.

(ii) Für alle $\boldsymbol{v} \in V$ ist
$$s(\boldsymbol{v},\ ) : V \to \mathbb{C}\,, \quad \boldsymbol{y} \mapsto s(\boldsymbol{v},\boldsymbol{y})$$
eine lineare Abbildung.

(3) Eine Sesquilinearform $s : V \times V \to \mathbb{C}$ heißt *hermitesch*, falls für alle Vektoren $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w} \in V$ gilt $s(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = \overline{s(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})}$.

Der Begriff der Sesquilinearform weist Analogien zu dem der Bilinearform auf, wobei die hermiteschen Formen den symmetrischen Bilinearformen entsprechen. Hier wird darauf verzichtet, alle Überlegungen aus 4/3/5 ff. für den weitgehend analogen Fall der Sesquilinearformen zu wiederholen, jedoch stellen wir anschließend einige nahe liegende Begriffe und offensichtliche Eigenschaften zusammen.

Bemerkung – Bezeichnungen. **6/2/2**

(1) $A \in \mathrm{M}(n;\mathbb{C})$ sei eine Matrix, so wird mittels
$$\big((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\big) \mapsto (\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_n)\cdot A \cdot {}^{\mathrm{t}}(y_1,\dots,y_n)$$
eine zugehörige Sesquilinearform s_A auf dem komplexen Standardraum $\mathbb{C}^n$ definiert; A ist durch s_A eindeutig bestimmt.

(2) Ist $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_n)$ eine Basis von V, $s : V \times V \to \mathbb{C}$ eine Sesquilinearform, so heißt $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s) := \big(s(\boldsymbol{b}_i,\boldsymbol{b}_j)\big)_{i,j} \in \mathrm{M}(n;\mathbb{C})$ die *Matrix von* s bezüglich $\mathcal{B}$. Aus den Koordinaten $(x_1,\dots,x_n)$ bzw. $(y_1,\dots,y_n)$ der Vektoren $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in V$ bezüglich $\mathcal{B}$ erhalten wir
$$s(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_n)\cdot \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s)\cdot {}^{\mathrm{t}}(y_1,\dots,y_n).$$

(3) Für eine komplexe Matrix U bezeichnet $\overline{U}$ diejenige Matrix, deren Einträge aus denen von U durch Konjugation entstehen. Der Basiswechsel zu einer Basis $\mathcal{B}'$ ergibt sich dann durch die Formel
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(s) = {}^{\mathrm{t}}\overline{U}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\cdot \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s)\cdot U_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}.$$

(4) $A \in \mathrm{M}(n;\mathbb{C})$ heißt *hermitesch*, wenn ${}^{\mathrm{t}}A = \overline{A}$ ist. Bezüglich einer beliebigen Basis $\mathcal{B}$ von V gilt:
Eine Sesquilinearform $s : V \times V \to \mathbb{C}$ ist genau dann hermitesch, wenn ihre Matrix $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s)$ hermitesch ist.

Beweis. Wir zeigen die Eigenschaften (2), (3). Dazu bezeichne $A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s)$ die Matrix der Sesquilinearform s, und
$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{b}_1 + \dots + x_n\boldsymbol{b}_n, \quad \boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{b}_1 + \dots + y_n\boldsymbol{b}_n \quad (\,x_i, y_j \in \mathbb{C}\,)$$
seien Vektoren aus V. Dann ist
$$s(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = s\Big(\sum_i x_i\boldsymbol{b}_i, \sum_j y_j\boldsymbol{b}_j\Big) = \sum_{i,j} s(x_i\boldsymbol{b}_i, y_j\boldsymbol{b}_j)$$
$$= \sum_{i,j} \overline{x_i}y_j s(\boldsymbol{b}_i,\boldsymbol{b}_j) = (\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_n)\cdot \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s)\cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$
Durch Basiswechsel

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = U_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = U_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \cdot \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} \quad \text{folgt}$$

$$s(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\overline{x}_1',\ldots,\overline{x}_n') \cdot \underbrace{{}^{\mathrm{t}}\overline{U}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \cdot \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s) \cdot U_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}}_{\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(s)} \cdot \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Ein nahe liegendes Beispiel ist die *hermitesche Standardform* auf dem komplexen Standardvektorraum $\mathbb{C}^n$, die durch

$$\big((x_1,\ldots,x_n),(y,,\ldots,y_n)\big) \mapsto \overline{x}_1 y_1 + \ldots + \overline{x}_n y_n$$

definiert wird. Ihre Matrix bezüglich der kanonischen Basis ist die Einheitsmatrix E_n.

Definition. $s : V \times V \to \mathbb{C}$ sei eine Sesquilinearform. 6/2/3

(1) s heißt *nicht ausgeartet*, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind.

 (i) Ist $\boldsymbol{x} \in V$ und $s(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0$ für alle $\boldsymbol{y} \in V$, so gilt $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

 (ii) Ist $\boldsymbol{y} \in W$ und $s(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0$ für alle $\boldsymbol{x} \in V$, so gilt $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$.

(2) s sei hermitesch, so heißt s *positiv definit* (bzw. *positiv semidefinit*), falls $s(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) > 0$ (bzw. $s(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) \geq 0$) für alle Vektoren $\boldsymbol{v} \in V \setminus \{\boldsymbol{0}\}$. Diese Vereinbarung ist sinnvoll, da aufgrund der Definition einer hermiteschen Form stets $s(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = \overline{s(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})}$ gilt, d.h. $s(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) \in \mathbb{R}$.

Entsprechend (2) wird künftig eine hermitesche Matrix als *positiv definit* (bzw. *positiv semidefinit*) bezeichnet, falls die zugehörige hermitesche Form auf dem Standardraum diese Eigenschaft besitzt.

Bemerkung. 6/2/4

(1) Eine positiv definite hermitesche Form ist nicht ausgeartet. Denn gilt z.B. $s(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0$ für alle $\boldsymbol{y} \in V$, so muss insbesondere $s(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = 0$ sein; da s positiv definit ist, folgt $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

(2) Die hermitesche Standardform auf $\mathbb{C}^n$ ist positiv definit, denn für $\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{C}^n$ folgt $\sum_i \overline{x}_i x_i = \sum_i |x_i|^2 > 0$, falls eine der Zahlen x_i von 0 verschieden ist.

Definition. (*euklidische und unitäre Vektorräume*) 6/2/5

(1) Ist V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und

$$<>: V \times V \to \mathbb{R}, \quad (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \mapsto <\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>$$

eine positiv definite symmetrische Bilinearform, so heißt das Paar $(V,<>)$ ein *euklidischer Vektorraum.*

(2) Ist V ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum und

$$<>: V \times V \to \mathbb{C}, \quad (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \mapsto <\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>$$

eine positiv definite hermitesche Form, so heißt das Paar $(V,<>)$ ein *unitärer Vektorraum.*

$<\,>$ wird in beiden Fällen als das *Skalarprodukt*, auch als *inneres Produkt* auf V bezeichnet und (wie bisher schon in vergleichbaren Situationen) in die Bezeichnungen meist nicht ausdrücklich aufgenommen.

Unter einem unitären $\mathbb{K}$-Vektorraum verstehen wir künftig einen euklidischen Vektorraum oder einen – im zuvor erklärten Sinn – unitären (je nachdem, ob $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gewählt ist). Wichtigste Beispiele sind die bereits bekannten *unitären Standardräume* $\mathbb{K}^n$ mit dem *Standardskalarprodukt*

$$<(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)> := \overline{x}_1 y_1 + \ldots + \overline{x}_n y_n.$$

Daraus ergibt sich insbesondere die *Standardnorm*

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\| := \sqrt{\overline{x}_1 x_1 + \ldots + \overline{x}_n x_n} = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2},$$

deren grundlegende Eigenschaften anschließend im allgemeineren Fall erläutert werden.

Definition – Satz. (*Norm eines Vektors*) 6/2/6

$(V, <\,>)$ sei ein unitärer $\mathbb{K}$-Vektorraum. Für $\boldsymbol{x} \in V$ wird

$$\|\boldsymbol{x}\| := \sqrt{<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}>} \in \mathbb{R}$$

Norm, auch *Länge* des Vektors $\boldsymbol{x}$ genannt.

Die Norm besitzt folgende Eigenschaften:

(1) $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$, *wobei genau dann Gleichheit besteht, wenn* $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

(2) $\|\alpha \cdot \boldsymbol{x}\| = |\alpha| \cdot \|\boldsymbol{x}\|$ *für* $\alpha \in \mathbb{K}$ *und* $\boldsymbol{x} \in V$.

(3) $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ *für* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ (*minkowskische Ungleichung*).

(4) $|<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}>| \leq \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|$ *für* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$; *dabei besteht genau dann Gleichheit, wenn* $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ *ein Paar linear abhängiger Vektoren ist* (*Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung*).

Beweis. (1) ist eine offensichtliche Konsequenz der Definition; (2) ergibt sich aus

$$\|\alpha\boldsymbol{x}\| = \sqrt{<\alpha\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{x}>} = \sqrt{\overline{\alpha}\alpha <\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}>} = \sqrt{|\alpha|^2} \cdot \sqrt{<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}>} = |\alpha| \cdot \|\boldsymbol{x}\|.$$

Zunächst wird nun (4) verifiziert. Sind die Vektoren $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ linear abhängig, so folgt die Behauptung aus (2). Anderenfalls ist insbesondere $\boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$ und o.B.d.A. kann $\|\boldsymbol{y}\| = 1$ angenommen werden.

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}\|^2 \cdot \|\boldsymbol{y}\|^2 &= \|\boldsymbol{x}\|^2 = \|(\boldsymbol{x} - <\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}> \boldsymbol{y}) + <\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}> \boldsymbol{y}\,\|^2 \\ &= \|\,\underbrace{\boldsymbol{x} - <\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}> \boldsymbol{y}}_{\neq \mathbf{0}}\,\|^2 + \underbrace{\|\,<\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}> \boldsymbol{y}\,\|^2}_{|<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}>|^2} > |<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}>|^2,\end{aligned}$$

denn es ist $<\boldsymbol{x} - <\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}> \boldsymbol{y}\,,\, \boldsymbol{y}> = 0$, und der erste Summand kann nicht verschwinden, da sonst $\boldsymbol{x}$ Vielfaches des Vektors $\boldsymbol{y}$ wäre.

Ein Beweis für (3) ergibt sich daraus folgendermaßen:

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 = <\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}> = <\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}> + <\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}> + 2\mathrm{Re}(<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}>),$$

und wegen (4) folgt

$$\mathrm{Re}(<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}>) \leq |\,\mathrm{Re}(<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}>)\,| \leq |<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}>| \leq \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|, \text{ daher}$$
$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 \leq \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\| = (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2. \qquad ❑$$

Anmerkung. Der unitäre Standardraum $\mathbb{C}^1 = \mathbb{C}$ besitzt als Standardnorm den Betrag komplexer Zahlen. Teil (3) des Satzes besagt daher insbesondere

$$|\alpha + \beta| \le |\alpha| + |\beta| \text{ für } \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Wir wenden uns nun einem aus der elementaren Geometrie vertrauten Begriff zu. Die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung zeigt, dass im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ für Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ stets

$$-1 \le \frac{<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}>}{\|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|} \le 1$$

erfüllt ist. Dies rechtfertigt folgende

Definition. (*Winkel*) 6/2/7

Ist V ein euklidischer Vektorraum und sind $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ von $\boldsymbol{0}$ verschieden, so heißt die eindeutig bestimmte reelle Zahl φ mit der Eigenschaft

$$\cos(\varphi) = \frac{<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}>}{\|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|}, \quad \varphi \in [0, \pi]$$

der Winkel zwischen den Vektoren $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$. Mit einer aus der Analysis vertrauten Bezeichnung gilt also $\varphi = \arccos(\|\boldsymbol{x}\|^{-1} \cdot \|\boldsymbol{y}\|^{-1} \cdot <\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}>)$.

Beispiel. Wir bestimmen den Winkel α zwischen den Vektoren $\boldsymbol{v} = (1, 0, 1)$ und $\boldsymbol{w} = (-1, 1, -2)$ im euklidischen Standardvektorraum $\mathbb{R}^3$.

Offensichtlich ist $<\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}>= -3$, $<\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}>= 2$, $<\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}>= 6$, daher

$$\alpha = \arccos\big(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\big) = \frac{5\pi}{6}. \qquad ❏$$

Es ist nun nahe liegend, Vektoren *orthogonal* zu nennen, wenn ihr Skalarprodukt verschwindet. Diesem Begriff widmet sich der folgende Abschnitt.

Orthogonalität und Orthogonalisierung

Definition. V sei ein unitärer $\mathbb{K}$-Vektorraum. 6/2/8

(1) Sind $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, so heißt $\boldsymbol{x}$ *orthogonal* zu $\boldsymbol{y}$, falls $<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}>= 0$ ist. Dies wird auch durch das Symbol $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$ ausgedrückt.

(2) Für eine Teilmenge $M \subseteq V$ bezeichnet
$$M^{\perp} := \{\boldsymbol{x} \in V \mid \forall \boldsymbol{m} \in M : \ \boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{m}\}$$
die Menge der zu M orthogonalen Vektoren.

(3) Eine Familie $(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m)$ von Vektoren aus V heißt *orthogonal*, falls für $i \ne j$ stets $\boldsymbol{b}_i \perp \boldsymbol{b}_j$ gilt, $i, j \in \{1, \ldots, m\}$; sie wird *orthonormal* genannt, falls überdies $\|\boldsymbol{b}_i\| = 1$ ist für $i = 1, \ldots, m$. Ist die gegebene Familie eine Basis von V, so wird sie entsprechend eine *Orthogonalbasis* bzw. *Orthonormalbasis* genannt.

Ein Vektor mit der Norm 1 heißt *normiert* und wird gelegentlich auch als *Einheitsvektor* bezeichnet. Wir sagen, $\boldsymbol{v} \in V \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ wird normiert, indem daraus $\boldsymbol{w} := \|\boldsymbol{v}\|^{-1} \cdot \boldsymbol{v}$ gebildet wird; wegen

$$<\|\boldsymbol{v}\|^{-1} \cdot \boldsymbol{v}, \|\boldsymbol{v}\|^{-1} \cdot \boldsymbol{v}>= \|\boldsymbol{v}\|^{-2} \cdot <\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}>= \|\boldsymbol{v}\|^{-2} \cdot \|\boldsymbol{v}\|^2 = 1$$

ist $\boldsymbol{w}$ dann offensichtlich ein normierter Vektor. Auf diese Weise kann jede Orthogonalbasis in eine Orthonormalbasis überführt werden.

Zunächst werden einige häufig verwendete Eigenschaften der Orthogonalität angegeben.

Bemerkung. V sei ein unitärer Vektorraum. 6/2/9

(1) Für eine Teilmenge $M \subseteq V$ ist $M^{\perp}$ stets ein Unterraum von V, genannt der *zu M orthogonale Unterraum.*

(2) Sind $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, so gilt

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Re}(<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}>) = 0\,;$$

im Spezialfall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bedeutet dies

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$$

(*Satz des Pythagoras*).

(3) Sind die Vektoren $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m \in V \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ paarweise orthogonal, d.h. $\boldsymbol{x}_i \perp \boldsymbol{x}_j$ für $i \neq j$, so ist das m-Tupel $(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m)$ linear unabhängig.

Beweis. Wir zeigen nur (3). Angenommen, $\alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \ldots + \alpha_m\boldsymbol{x}_m = \boldsymbol{0}$ für gewisse Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}$. Dann verschwindet auch das Skalarprodukt mit jedem der Vektoren $\boldsymbol{x}_i$, d.h.

$$\begin{aligned} 0 &= <\boldsymbol{x}_i, \alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \ldots + \alpha_m\boldsymbol{x}_m> = \sum_{j=1}^{m} <\boldsymbol{x}_i, \alpha_j\boldsymbol{x}_j> \\ &= \sum_{j=1}^{m} \alpha_j <\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j> = \alpha_i \|\boldsymbol{x}_i\|\,, \end{aligned}$$

woraus wegen $\boldsymbol{x}_i \neq \boldsymbol{0}$ offenbar $\alpha_i = 0$ folgt. ❏

Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so folgt bereits aus 4/3/10 (1) die Existenz einer Orthonormalbasis; für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ kann ähnlich vorgegangen werden. Nachfolgend wird ein weniger willkürliches Verfahren zur Überführung einer Basis in eine Orthonormalbasis angegeben.

Satz. (*Orthogonalisierung nach E. Schmidt*) 6/2/10

Ist $\mathcal{B} = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ eine Basis des unitären Vektorraumes V, so existiert eine Orthogonalbasis $(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ von V, deren Fahne mit der Fahne von $\mathcal{B}$ übereinstimmt. Insbesondere ist dann

$$\Big(\frac{1}{\|\boldsymbol{b}_1\|}\,\boldsymbol{b}_1, \ldots, \frac{1}{\|\boldsymbol{b}_n\|}\,\boldsymbol{b}_n\Big)$$

Orthonormalbasis von V. Eine Basis mit der angegebenen Eigenschaft kann folgendermaßen gewonnen werden:

$\boldsymbol{b}_1 := \boldsymbol{v}_1$, *und sind die gesuchten Vektoren $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ bereits konstruiert ($m < n$), so wird induktiv*

$$\boldsymbol{b}_{m+1} := x_1^{(m)}\boldsymbol{b}_1 + \ldots + x_m^{(m)}\boldsymbol{b}_m + \boldsymbol{v}_{m+1}$$

gesetzt, wobei $x_i^{(m)} \in \mathbb{K}$ die eindeutig bestimmten Zahlen sind, für die die Bedingungen $\boldsymbol{b}_i \perp \boldsymbol{b}_{m+1}$ erfüllt sind, $i = 1, \ldots, m$.

Beweis. Zunächst ist induktiv klar, dass bei so gewählten Vektoren $\boldsymbol{b}_i$ die Fahnen übereinstimmen, die durch die Unterräume $\mathbb{K}\boldsymbol{b}_1 + \ldots + \mathbb{K}\boldsymbol{b}_m = \mathbb{K}\boldsymbol{v}_1 + \ldots + \mathbb{K}\boldsymbol{v}_m$ gebildet werden. Insbesondere ist $(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ ebenfalls eine

Basis. Daher bleibt nur zu zeigen, dass für gegebene Vektoren $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ mit $<\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j>= 0$ für $i \neq j$ eindeutig bestimmte Zahlen $x_i^{(m)}$ existieren, so dass $\boldsymbol{b}_{m+1} = x_1^{(m)}\boldsymbol{b}_1 + \ldots + x_m^{(m)}\boldsymbol{b}_m + \boldsymbol{v}_{m+1}$ zu $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ orthogonal ist.
Nun ist die Bedingung $<\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_{m+1}>= 0$ für $i \leq m$ gleichbedeutend mit

$$0 = <\boldsymbol{b}_i, \sum_{j=1}^{m} x_j^{(m)}\boldsymbol{b}_j + \boldsymbol{v}_{m+1}> = \sum_{j=1}^{m} x_j^{(m)} <\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j> + <\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{v}_{m+1}>$$

$$= x_i^{(m)} <\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_i> + <\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{v}_{m+1}>, \text{ d.h. äquivalent zu}$$

$$x_i^{(m)} = -\frac{<\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{v}_{m+1}>}{<\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_i>}.$$

Die dadurch eindeutig bestimmten Zahlen $x_i^{(m)}$ erfüllen die Behauptung des Satzes. ❏

Beispiel. Wir verwenden das Orthogonalisierungsverfahren zur Bestimmung einer Orthonormalbasis des euklidischen Standardraumes $\mathbb{R}^3$, deren Fahne mit der Fahne der folgenden Basis $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ übereinstimmt;

$$\boldsymbol{v}_1 = (1, 1, -1), \quad \boldsymbol{v}_2 = (-3, -1, -1), \quad \boldsymbol{v}_3 = (-2, -2, -1).$$

Zunächst orthogonalisieren wir. Dazu wird $\boldsymbol{b}_1 := \boldsymbol{v}_1$ gewählt und $\boldsymbol{b}_2 := x_1\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{v}_2$ als Vektor, für den $<\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2>= 0$ ist, d.h.

$$x_1 <\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1> + <\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{v}_2>= 0 \text{ mit } <\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1>= 3, \quad <\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{v}_2>= -3.$$

Es folgt $x_1 = 1$, und Einsetzen ergibt $\boldsymbol{b}_2 = (-2, 0, -2)$.

Analog werden $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ gewählt, für die

$$\boldsymbol{b}_3 = y_1\boldsymbol{b}_1 + y_2\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{v}_3, \quad <\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_3>=<\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3>= 0$$

ist, daher

$$y_1 <\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1> + <\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{v}_3>= y_2 <\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2> + <\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{v}_3>= 0.$$

Aus

$$<\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{v}_3>= -3, \quad <\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2>= 8, \quad <\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{v}_3>= 6$$

erhalten wir

$$y_1 = 1, \quad y_2 = -\frac{3}{4}.$$

Durch Einsetzen ergibt sich der dritte Basisvektor $\boldsymbol{b}_3 = \left(\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}\right)$.

Abschließend wird die gefundene Orthogonalbasis $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ durch Multiplikation mit Konstanten normiert; wir erhalten die Orthonormalbasis

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, -1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, -1)\right). \quad ❏$$

Korollar. *V sei ein unitärer Vektorraum.* 6/2/11

(1) *Es existiert eine Orthonormalbasis für V.*

(2) *$(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m)$ sei ein m-Tupel von Vektoren aus V mit $<\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j>= \delta_{ij}$, $i, j \in \{1, \ldots, m\}$. Dann lässt sich $(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m)$ zu einer Orthonormalbasis $(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ von V ergänzen.*

Beweis. (1) folgt durch Anwendung des Satzes auf eine beliebige Basis. Um den zweiten Teil der Behauptung zu beweisen, ergänzen wir zunächst das m-Tupel $(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m)$ linear unabhängiger Vektoren zu einer Basis von V und wenden das Orthogonalisierungsverfahren an. Dabei bleiben die Vektoren $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ unverändert, und durch Normierung der übrigen entsteht eine Orthonormalbasis. ❑

Jeder Unterraum eines unitären Vektorraumes besitzt durch Einschränkung des Skalarprodukts die Struktur eines unitären Vektorraumes. Die obige Eigenschaft (2) lässt sich daher auch so ausdrücken:

Korollar. *Jede Orthonormalbasis eines Unterraumes U des unitären Vektorraumes V lässt sich zu einer Orthonormalbasis von V ergänzen.* 6/2/12
Es gilt $\dim(U) + \dim(U^\perp) = \dim(V)$.

Beweis. Ist $(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ eine Orthonormalbasis für V, so dass U durch $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ erzeugt wird, dann ist $\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{b}_1 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{b}_n \in V$ genau dann aus $U^\perp$, wenn für die erzeugenden Vektoren $\boldsymbol{b}_i$, $1 \leq i \leq m$ des Unterraumes U die Bedingung $<\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{x}> = 0$ erfüllt ist, d.h. wenn $\alpha_i = 0$ ist für $1 \leq i \leq m$; dies bedeutet $U^\perp = \mathbb{K}\boldsymbol{b}_{m+1} + \ldots + \mathbb{K}\boldsymbol{b}_m$. ❑

Korollar – Definition. (*orthogonale Summe*) 6/2/13

U sei Unterraum des unitären Vektorraumes V. Dann ist

(1) $(U^\perp)^\perp = U$,

(2) $U \oplus U^\perp = V$.

Der Unterraum $U^\perp$ heißt daher auch *orthogonales Komplement* von U in V. Künftig wird für Unterräume U, W die Notation $V = U \textcircled{\perp} W$ verwendet um auszudrücken, dass $W = U^\perp$ oder (gleichbedeutend) $U = W^\perp$ gilt.

Allgemeiner heißt V *orthogonale Summe* der Unterräume $U_1, \ldots, U_k$, falls $V = U_1 + \ldots + U_k$ ist und $\boldsymbol{x}_i \perp \boldsymbol{x}_j$ für beliebige Vektoren $\boldsymbol{x}_i \in U_i$ und $\boldsymbol{x}_j \in U_j$, sofern $i \neq j$.
Insbesondere ist V dann direkte Summe dieser Unterräume; wir schreiben $V = U_1 \textcircled{\perp} \ldots \textcircled{\perp} U_k$.

(3) Die Projektion von V auf U längs $U^\perp$ heißt *orthogonale Projektion* auf den Unterraum U.

Beweis für (1), (2). Zu (1) bemerken wir, dass $(U^\perp)^\perp \supseteq U$, und durch zweimalige Anwendung des vorigen Korollars folgt $\dim\big((U^\perp)^\perp\big) = \dim(V) - \dim(U^\perp) = \dim(U)$, daher $(U^\perp)^\perp = U$.
Zu (2) stellen wir zunächst fest, dass $U \cap U^\perp = \boldsymbol{0}$ ist (aus $\boldsymbol{x} \in U \cap U^\perp$ folgt $\|\boldsymbol{x}\| = <\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}> = 0$). Die Behauptung ergibt sich nun aus der bereits unter (1) verwendeten Formel $\dim(U) + \dim(U^\perp) = \dim(V)$. ❑

Korollar. *V sei ein unitärer $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\boldsymbol{x} \in V$.* 6/2/14

(1) *Ist* $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ *eine Orthonormalbasis von* V, *so gilt*

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \overline{<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}_i>}\, \boldsymbol{b}_i = \sum_{i=1}^{n} <\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{x}> \boldsymbol{b}_i \,,$$

d.h. $(<\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{x}>, \ldots, <\boldsymbol{b}_n, \boldsymbol{x}>)$ *ist das Koordinatentupel von* $\boldsymbol{x}$ *bezüglich der Basis* $\mathcal{B}$ *(parsevalsche Gleichung).*

(2) $(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m)$ *sei ein* m*-Tupel von Vektoren, für die* $<\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j> = \delta_{ij}$ *ist,* $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, *so gilt*

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 \geq \sum_{i=1}^{m} |<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}_i>|^2 \qquad (\textit{besselsche Ungleichung}).$$

(3) *Bezeichnet* p *die orthogonale Projektion von* V *auf den Unterraum* U, *so gilt* $\|p(\boldsymbol{x})\| \leq \|\boldsymbol{x}\|$ *für jeden Vektor* $\boldsymbol{x} \in V$, *und* $\|p(\boldsymbol{x})\| = \|\boldsymbol{x}\|$ *ist äquivalent zu* $\boldsymbol{x} \in U$.

Beweis. Wir wählen Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ mit $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{b}_i$.

$$<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}_j> = <\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j> = \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i}\, \delta_{ij} = \overline{\alpha_j}\,,$$

d.h. $\alpha_j = \overline{<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}_j>}$. Um den Teil (2) der Behauptung zu beweisen, ergänzen wir $(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m)$ zu einer Orthonormalbasis $(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$. Aus (1) folgt $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \overline{<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}_i>}\, \boldsymbol{b}_i$, daher

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}\|^2 &= <\sum_{i=1}^{n} \overline{<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}_i>}\, \boldsymbol{b}_i, \sum_{j=1}^{n} \overline{<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}_j>}\, \boldsymbol{b}_j> \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} <\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}_i>\ \overline{<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}_j>}\, \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} <\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}_i>\ \overline{<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}_i>} \\
&= \sum_{i=1}^{n} |<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}_i>|^2 \geq \sum_{i=1}^{m} |<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}_i>|^2 \,.
\end{aligned}$$

(3) folgt aus (1) und (2), indem eine Orthonormalbasis $(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m)$ von U zu einer Orthonormalbasis $(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ von V ergänzt wird. Für $\boldsymbol{x} \in V$ ergibt sich $\boldsymbol{x} = <\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{x}> \boldsymbol{b}_1 + \ldots + <\boldsymbol{b}_n, \boldsymbol{x}> \boldsymbol{b}_n$, folglich

$$p(\boldsymbol{x}) = <\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{x}> \boldsymbol{b}_1 + \ldots + <\boldsymbol{b}_m, \boldsymbol{x}> \boldsymbol{b}_m$$

und deshalb

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |<\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{x}>|^2 \geq \sum_{i=1}^{m} |<\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{x}>|^2 = \|p(\boldsymbol{x})\| \,.$$

Gleichheit bedeutet hier $|<\boldsymbol{b}_{m+1}, \boldsymbol{x}>|^2 + \ldots + |<\boldsymbol{b}_n, \boldsymbol{x}>|^2 = 0$, das heißt $<\boldsymbol{b}_{m+1}, \boldsymbol{x}> = \ldots = <\boldsymbol{b}_n, \boldsymbol{x}> = 0$, also $\boldsymbol{x} \in U$. ❏

Schwerpunkte zum gewählten Stoff

- Sesquilinearformen und hermitesche Formen; positive Definitheit [6/2/1 – 6/2/4]
- Begriff des unitären Vektorraumes; elementare Eigenschaften der Norm [6/2/5 – 6/2/6]

- Winkel zwischen Vektoren eines euklidischen Vektorraumes [6/2/7]
- Orthogonalisierungsverfahren nach E. Schmidt [6/2/8 – 6/2/12]
- Orthogonales Komplement eines Unterraumes [6/2/13]
- Koordinaten bezüglich Orthonormalbasen (parsevalsche Gleichung und besselsche Ungleichung) [6/2/14]