Lösungen zur Aufgabe 2

erzeugt mit der Online-Fassung „Lineare Algebra individuell“ Ver. 0.51,

M. Roczen und H. Wolter unter Mitarbeit von W. Pohl, D. Popescu, R. Laza

---

Aufgabe 2 Exemplar 1

Lösung.

(1) Es ist $a+b=-3i-5$, $a-b=-i-1$ und $ab=7i+4$.
Den Quotienten $\dfrac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}}=\frac{(-2i-3)\cdot(i-2)}{(-i-2)\cdot(i-2)}=\frac{i+8}{5}=(\frac{1}{5}i+\frac{8}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x+(\frac{1}{2}i+1))^2=-\frac{25}{4}$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*)\qquad 4\cdot(x+(\frac{1}{2}i+1))^2=-25.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn -25 das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2=u^2-v^2+2uvi$, daher

$$(u+vi)^2=-25$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*}\qquad \begin{cases} u^2-v^2=-25\\ 2uv=0. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u,v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z=u+vi=\pm(5i).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x+(\frac{1}{2}i+1))=\pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1=-3i-1$ und $x_2=2i-1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 2

Lösung.

(1) Es ist $a+b=4i-1$, $a-b=5$ und $ab=-2i-10$.
Den Quotienten $\dfrac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}}=\frac{(2i+2)\cdot(-2i-3)}{(2i-3)\cdot(-2i-3)}=\frac{-10i-2}{13}=-(\frac{10}{13}i+\frac{2}{13}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + (\frac{1}{2}i - 1))^2 = -\frac{9}{4}$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x + (\frac{1}{2}i - 1))^2 = -9.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn -9 das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -9$$

äquivalent zum System

$$({}^{*}_{*}) \qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = -9 \\ \quad 2uv = 0. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + (\frac{1}{2}i - 1)) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i + 1$ und $x_2 = i + 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 — Exemplar 3

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 3i$, $a - b = -i + 4$ und $ab = 2i - 6$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(i+2)\cdot(-2i-2)}{(2i-2)\cdot(-2i-2)} = \frac{-6i-2}{8} = -(\frac{3}{4}i + \frac{1}{4}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + (i - \frac{1}{2}))^2 = (10i + \frac{9}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x + (i - \frac{1}{2}))^2 = 40i + 9.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $40i+9$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = 40i + 9$$

äquivalent zum System

$$(\ast\atop\ast) \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = 9 \\ \quad 2uv = 40. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(4i + 5).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(\ast)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + (i - \frac{1}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i - 2$ und $x_2 = i + 3$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 4

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -3i + 1$, $a - b = -i - 5$ und $ab = -4i - 8$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(-2i-2)\cdot(i+3)}{(-i+3)\cdot(i+3)} = \frac{-8i-4}{10} = -(\frac{4}{5}i + \frac{2}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}))^2 = \frac{25}{2}i$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(\ast) \quad 4\cdot(x - (\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}))^2 = 50i.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $50i$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = 50i$$

äquivalent zum System

$$(\ast\atop\ast) \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = 0 \\ \quad 2uv = 50. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i + 5).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(\ast)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (\frac{1}{2}i - \frac{1}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i - 3$ und $x_2 = 3i + 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 5

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 1$, $a - b = -6i - 3$ und $ab = -9i + 7$.
Den Quotienten $\dfrac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(-3i-1)\cdot(-3i+2)}{(3i+2)\cdot(-3i+2)} = \frac{-3i-11}{13} = -(\frac{3}{13}i + \frac{11}{13}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (\frac{1}{2}i + \frac{3}{2}))^2 = (\frac{3}{2}i - 2)$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x - (\frac{1}{2}i + \frac{3}{2}))^2 = 6i - 8.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $6i-8$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = 6i - 8$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = -8 \\ 2uv = 6. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i + 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (\frac{1}{2}i + \frac{3}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i + 1$ und $x_2 = 2i + 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 6

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -2i + 1$, $a - b = 4i + 3$ und $ab = -7i + 1$.
Den Quotienten $\dfrac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(i+2)\cdot(3i-1)}{(-3i-1)\cdot(3i-1)} = \frac{5i-5}{10} = (\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - \frac{1}{2}i)^2 = (6i + \frac{7}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x - \frac{1}{2}i)^2 = 24i + 7.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $24i+7$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = 24i + 7$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = 7 \\ \quad\; 2uv = 24. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i + 4).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - \frac{1}{2}i) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i - 2$ und $x_2 = 2i + 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 7

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 5i - 1$, $a - b = i - 3$ und $ab = -i - 8$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(3i-2)\cdot(-2i+1)}{(2i+1)\cdot(-2i+1)} = \frac{7i+4}{5} = (\frac{7}{5}i + \frac{4}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (\frac{1}{2}i + 1))^2 = -(6i - \frac{7}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x - (\frac{1}{2}i + 1))^2 = -24i + 7.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-24i + 7$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -24i + 7$$

äquivalent zum System

$$(\begin{smallmatrix}*\\ *\end{smallmatrix})\qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = 7 \\ \quad 2uv = -24. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i - 4).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (\frac{1}{2}i + 1)) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i + 3$ und $x_2 = 2i - 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 8

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -2i - 4$, $a - b = 2$ und $ab = 4i + 2$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(-i-1)\cdot(i-3)}{(-i-3)\cdot(i-3)} = \frac{2i+4}{10} = (\frac{1}{5}i + \frac{2}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (i - \frac{1}{2}))^2 = -(6i + \frac{7}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x - (i - \frac{1}{2}))^2 = -24i - 7.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-24i - 7$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist $(u, v \in \mathbb{R})$. Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -24i - 7$$

äquivalent zum System

$$(\begin{smallmatrix}*\\ *\end{smallmatrix})\qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = -7 \\ \quad 2uv = -24. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(4i - 3).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (i - \frac{1}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i+1$ und $x_2 = 3i-2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 9

Lösung.

(1) Es ist $a+b = 4i+1$, $a-b = 2i+3$ und $ab = -i-5$.

Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(3i+2)\cdot(-i-1)}{(i-1)\cdot(-i-1)} = \frac{-5i+1}{2} = -(\frac{5}{2}i - \frac{1}{2}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + (\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}))^2 = -(\frac{15}{2}i + 4)$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x + (\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}))^2 = -30i - 16.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-30i-16$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u+vi)^2 = -30i - 16$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = -16 \\ \quad 2uv = -30. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i - 3).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + (\frac{1}{2}i - \frac{1}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i+2$ und $x_2 = 2i-1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 10

Lösung.

(1) Es ist $a+b = 2i-1$, $a-b = 4i+3$ und $ab = -7i+1$.

Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(3i+1)\cdot(i-2)}{(-i-2)\cdot(i-2)} = \frac{-5i-5}{5} = -(i+1).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x+(i-\frac{1}{2}))^2 = -(6i+\frac{7}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x+(i-\frac{1}{2}))^2 = -24i-7.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-24i-7$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2 = u^2-v^2+2uvi$, daher

$$(u+vi)^2 = -24i-7$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \qquad \begin{cases} u^2-v^2=-7 \\ \quad 2uv=-24. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u,v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u+vi = \pm(4i-3).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x+(i-\frac{1}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1=-3i+2$ und $x_2=i-1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 11

Lösung.

(1) Es ist $a+b=2i-2$, $a-b=-4i$ und $ab=-2i+4$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(-i-1)\cdot(-3i-1)}{(3i-1)\cdot(-3i-1)} = \frac{4i-2}{10} = (\frac{2}{5}i-\frac{1}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x-(\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}))^2 = \frac{25}{2}i$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x-(\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}))^2 = 50i.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $50i$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2 = u^2-v^2+2uvi$, daher

$$(u+vi)^2 = 50i$$

äquivalent zum System

$$(\ast\ast)\quad \begin{cases} u^2 - v^2 = 0 \\ \quad 2uv = 50. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i + 5).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(\ast)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (\frac{1}{2}i - \frac{1}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i - 3$ und $x_2 = 3i + 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 12

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -i$, $a - b = 3i + 4$ und $ab = -6i - 2$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(i+2)\cdot(2i-2)}{(-2i-2)\cdot(2i-2)} = \frac{2i-6}{8} = (\frac{1}{4}i - \frac{3}{4}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + (i - \frac{5}{2}))^2 = (2i - \frac{15}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(\ast)\qquad 4\cdot(x + (i - \frac{5}{2}))^2 = 8i - 15.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $8i-15$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = 8i - 15$$

äquivalent zum System

$$(\ast\ast)\quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -15 \\ \quad 2uv = 8. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(4i + 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(\ast)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + (i - \frac{5}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i + 2$ und $x_2 = i + 3$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 13

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 4i$, $a - b = -2i - 4$ und $ab = -4i - 7$.
Den Quotienten $\dfrac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(i-2)\cdot(-3i+2)}{(3i+2)\cdot(-3i+2)} = \frac{8i-1}{13} = (\frac{8}{13}i - \frac{1}{13}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}))^2 = -\frac{25}{2}i$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x - (\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}))^2 = -50i.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-50i$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -50i$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = 0 \\ \quad 2uv = -50. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i - 5).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (\frac{1}{2}i - \frac{1}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i + 2$ und $x_2 = 3i - 3$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 14

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -i + 4$, $a - b = -5i$ und $ab = -2i + 10$.
Den Quotienten $\dfrac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(-3i+2)\cdot(-2i+2)}{(2i+2)\cdot(-2i+2)} = \frac{-10i-2}{8} = -(\frac{5}{4}i + \frac{1}{4}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (\frac{1}{2}i + \frac{5}{2}))^2 = -(\frac{5}{2}i + 6)$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x - (\frac{1}{2}i + \frac{5}{2}))^2 = -10i - 24.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-10i - 24$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -10i - 24$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = -24 \\ \quad 2uv = -10. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i - 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (\frac{1}{2}i + \frac{5}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i + 3$ und $x_2 = 3i + 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 15

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 1$, $a - b = 4i + 5$ und $ab = -10i - 2$.

Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(2i + 3)\cdot(2i - 2)}{(-2i - 2)\cdot(2i - 2)} = \frac{2i - 10}{8} = (\frac{1}{4}i - \frac{5}{4}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + (\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}))^2 = \frac{25}{2}i$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x + (\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}))^2 = 50i.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $50i$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = 50i$$

äquivalent zum System

$$(\ast_\ast)\quad \begin{cases} u^2 - v^2 = 0 \\ \quad 2uv = 50. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i + 5).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(\ast)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + (\frac{1}{2}i - \frac{1}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i - 2$ und $x_2 = 2i + 3$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 16

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -i - 5$, $a - b = -3i + 1$ und $ab = 4i + 8$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(-2i-2)\cdot(-i-3)}{(i-3)\cdot(-i-3)} = \frac{8i+4}{10} = (\frac{4}{5}i + \frac{2}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + (i + \frac{3}{2}))^2 = (2i - \frac{15}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(\ast)\quad 4\cdot(x + (i + \frac{3}{2}))^2 = 8i - 15.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $8i-15$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = 8i - 15$$

äquivalent zum System

$$(\ast_\ast)\quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -15 \\ \quad 2uv = 8. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(4i + 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(\ast)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + (i + \frac{3}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i - 2$ und $x_2 = i - 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 17

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -i - 3,\ a - b = 3i - 1$ und $ab = 3i + 4$.
Den Quotienten $\dfrac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(i-2)\cdot(2i-1)}{(-2i-1)\cdot(2i-1)} = \frac{-5i}{5} = -i.$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (\frac{1}{2}i + 1))^2 = -(10i + \frac{9}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x - (\frac{1}{2}i + 1))^2 = -40i - 9.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-40i - 9$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -40i - 9$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = -9 \\ \quad 2uv = -40. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i - 4).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (\frac{1}{2}i + 1)) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i + 3$ und $x_2 = 3i - 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 18

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 4i - 3,\ a - b = -2i + 1$ und $ab = -5i - 1$.
Den Quotienten $\dfrac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(i-1)\cdot(-3i-2)}{(3i-2)\cdot(-3i-2)} = \frac{i+5}{13} = (\frac{1}{13}i + \frac{5}{13}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + (i + \frac{1}{2}))^2 = (6i - \frac{7}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x + (i + \frac{1}{2}))^2 = 24i - 7.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $24i - 7$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = 24i - 7$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = -7 \\ \quad 2uv = 24. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(4i + 3).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + (i + \frac{1}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i - 2$ und $x_2 = i + 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 19

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -4i + 1$, $a - b = -2i - 5$ und $ab = -7i - 9$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(-3i - 2)\cdot(i + 3)}{(-i + 3)\cdot(i + 3)} = \frac{-11i - 3}{10} = -(\frac{11}{10}i + \frac{3}{10}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + (i - \frac{5}{2}))^2 = -(2i + \frac{15}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x + (i - \frac{5}{2}))^2 = -8i - 15.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-8i - 15$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -8i - 15$$

äquivalent zum System

$$(\ast)\quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -15 \\ \quad 2uv = -8. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(4i - 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(\ast)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + (i - \frac{5}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i + 3$ und $x_2 = i + 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 20

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -i + 3$, $a - b = 3i + 1$ und $ab = -3i + 4$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(i+2)\cdot(2i+1)}{(-2i+1)\cdot(2i+1)} = \frac{5i}{5} = i.$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - \frac{1}{2}i)^2 = (10i - \frac{9}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(\ast)\qquad 4\cdot(x - \frac{1}{2}i)^2 = 40i - 9.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $40i-9$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = 40i - 9$$

äquivalent zum System

$$(\ast)\quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -9 \\ \quad 2uv = 40. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i + 4).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(\ast)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - \frac{1}{2}i) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i - 2$ und $x_2 = 3i + 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 21

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -5$, $a - b = 4i + 1$ und $ab = -2i + 10$.

Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(2i-2)\cdot(2i-3)}{(-2i-3)\cdot(2i-3)} = \frac{-10i+2}{13} = -(\frac{10}{13}i - \frac{2}{13}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (\frac{1}{2}i + 2))^2 = -(3i + \frac{5}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x - (\frac{1}{2}i + 2))^2 = -12i - 5.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-12i - 5$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -12i - 5$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = -5 \\ \quad 2uv = -12. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i - 2).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (\frac{1}{2}i + 2)) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i + 3$ und $x_2 = 2i + 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 22

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -4$, $a - b = -6i + 2$ und $ab = 6i + 12$.

Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(-3i-1)\cdot(-3i-3)}{(3i-3)\cdot(-3i-3)} = \frac{12i-6}{18} = (\frac{2}{3}i - \frac{1}{3}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x+(\frac{1}{2}i+2))^2 = -(3i+\frac{5}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x+(\frac{1}{2}i+2))^2 = -12i-5.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-12i-5$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u+vi)^2 = -12i-5$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = -5 \\ \quad 2uv = -12. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u+vi = \pm(3i-2).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x+(\frac{1}{2}i+2)) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i-1$ und $x_2 = i-3$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 23

Lösung.

(1) Es ist $a+b = 2$, $a-b = 2i-4$ und $ab = 4i-2$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(i-1)\cdot(i+3)}{(-i+3)\cdot(i+3)} = \frac{2i-4}{10} = (\frac{1}{5}i-\frac{2}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x-(\frac{1}{2}i-\frac{5}{2}))^2 = (\frac{3}{2}i-2)$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x-(\frac{1}{2}i-\frac{5}{2}))^2 = 6i-8.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $6i-8$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u+vi)^2 = 6i-8$$

äquivalent zum System

$$(**)\quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -8 \\ \quad 2uv = 6. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i + 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (\frac{1}{2}i - \frac{5}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i - 3$ und $x_2 = 2i - 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 — Exemplar 24

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 4i + 1,\ a - b = -2i - 5$ und $ab = -3i - 9.$

Den Quotienten $\dfrac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(i-2)\cdot(-3i+3)}{(3i+3)\cdot(-3i+3)} = \frac{9i-3}{18} = (\frac{1}{2}i - \frac{1}{6}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (\frac{1}{2}i - \frac{3}{2}))^2 = (\frac{3}{2}i - 2)$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*)\qquad 4\cdot(x - (\frac{1}{2}i - \frac{3}{2}))^2 = 6i - 8.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $6i-8$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi,$ daher

$$(u + vi)^2 = 6i - 8$$

äquivalent zum System

$$(**)\quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -8 \\ \quad 2uv = 6. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i + 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (\frac{1}{2}i - \frac{3}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i - 2$ und $x_2 = 2i - 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 25

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -4i + 2,\ a - b = -2i - 4$ und $ab = -8i - 6$.

Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(-3i-1)\cdot(i+3)}{(-i+3)\cdot(i+3)} = \frac{-10i}{10} = -i.$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + (\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}))^2 = (\frac{15}{2}i + 4)$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x + (\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}))^2 = 30i + 16.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $30i + 16$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi,$ daher

$$(u + vi)^2 = 30i + 16$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = 16 \\ \quad 2uv = 30. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i + 5).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + (\frac{1}{2}i + \frac{1}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i - 3$ und $x_2 = i + 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 26

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 4i - 1,\ a - b = 2i - 5$ und $ab = 3i - 9$.

Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(3i-3)\cdot(-i+2)}{(i+2)\cdot(-i+2)} = \frac{9i-3}{5} = (\frac{9}{5}i - \frac{3}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + (\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}))^2 = -\frac{9}{2}i$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x + (\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}))^2 = -18i.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-18i$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -18i$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = 0 \\ \quad\; 2uv = -18. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i - 3).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + (\frac{1}{2}i + \frac{1}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i + 1$ und $x_2 = i - 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 — Exemplar 27

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -3i + 1$, $a - b = -i + 3$ und $ab = -4$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(-2i + 2)\cdot(i - 1)}{(-i - 1)\cdot(i - 1)} = \frac{4i}{2} = 2i.$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + (\frac{1}{2}i + \frac{3}{2}))^2 = -(\frac{5}{2}i + 6)$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x + (\frac{1}{2}i + \frac{3}{2}))^2 = -10i - 24.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-10i - 24$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -10i - 24$$

äquivalent zum System

$$\left(\begin{smallmatrix}*\\ *\end{smallmatrix}\right) \qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = -24 \\ \quad 2uv = -10. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i - 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + (\frac{1}{2}i + \frac{3}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i - 1$ und $x_2 = 2i - 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 28

Lösung.

(1) Es ist $a + b = i + 5$, $a - b = -5i + 1$ und $ab = 5i + 12$.
Den Quotienten $\dfrac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(-2i + 3)\cdot(-3i + 2)}{(3i + 2)\cdot(-3i + 2)} = \frac{-13i}{13} = -i.$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (\frac{1}{2}i - \frac{3}{2}))^2 = -(\frac{5}{2}i + 6)$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x - (\frac{1}{2}i - \frac{3}{2}))^2 = -10i - 24.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-10i - 24$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -10i - 24$$

äquivalent zum System

$$\left(\begin{smallmatrix}*\\ *\end{smallmatrix}\right) \qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = -24 \\ \quad 2uv = -10. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i - 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (\frac{1}{2}i - \frac{3}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i - 1$ und $x_2 = 3i - 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 29

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -i - 1$, $a - b = 3i + 3$ und $ab = -4i$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(i+1)\cdot(2i-2)}{(-2i-2)\cdot(2i-2)} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}.$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (\frac{1}{2}i + 3))^2 = -\frac{9}{4}$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x - (\frac{1}{2}i + 3))^2 = -9.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn -9 das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -9$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = -9 \\ \quad 2uv = 0. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (\frac{1}{2}i + 3)) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i + 3$ und $x_2 = 2i + 3$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 30

Lösung.

(1) Es ist $a + b = i$, $a - b = 5i - 2$ und $ab = 5i + 5$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(3i-1)\cdot(2i+1)}{(-2i+1)\cdot(2i+1)} = \frac{i-7}{5} = (\frac{1}{5}i - \frac{7}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + (\frac{1}{2}i - \frac{5}{2}))^2 = -(\frac{5}{2}i + 6)$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x + (\frac{1}{2}i - \frac{5}{2}))^2 = -10i - 24.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-10i - 24$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -10i - 24$$

äquivalent zum System

$$({*\atop *}) \qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = -24 \\ \quad 2uv = -10. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i - 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + (\frac{1}{2}i - \frac{5}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i + 3$ und $x_2 = 2i + 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 31

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 4i - 3$, $a - b = -2i + 1$ und $ab = -5i - 1$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(i-1)\cdot(-3i-2)}{(3i-2)\cdot(-3i-2)} = \frac{i+5}{13} = (\frac{1}{13}i + \frac{5}{13}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (i - \frac{3}{2}))^2 = -(2i + \frac{15}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x - (i - \frac{3}{2}))^2 = -8i - 15.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-8i - 15$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -8i - 15$$

äquivalent zum System

$$(\ast_\ast) \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -15 \\ \quad 2uv = -8. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u,v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(4i - 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(\ast)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (i - \frac{3}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i - 1$ und $x_2 = 3i - 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 32

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 2i + 3$, $a - b = 1$ und $ab = 3i + 1$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(i+2)\cdot(-i+1)}{(i+1)\cdot(-i+1)} = \frac{-i+3}{2} = -(\frac{1}{2}i - \frac{3}{2}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (\frac{1}{2}i - 1))^2 = (10i - \frac{9}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(\ast) \quad 4\cdot(x - (\frac{1}{2}i - 1))^2 = 40i - 9.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $40i - 9$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = 40i - 9$$

äquivalent zum System

$$(\ast_\ast) \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -9 \\ \quad 2uv = 40. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u,v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i + 4).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(\ast)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (\frac{1}{2}i - 1)) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i - 3$ und $x_2 = 3i + 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 33

Lösung.

(1) Es ist $a + b = i - 1$, $a - b = -3i + 3$ und $ab = 4i$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(-i+1)\cdot(-2i-2)}{(2i-2)\cdot(-2i-2)} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}.$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}))^2 = (\frac{15}{2}i - 4)$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x - (\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}))^2 = 30i - 16.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $30i - 16$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = 30i - 16$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = -16 \\ 2uv = 30. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i + 3).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (\frac{1}{2}i + \frac{1}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i - 1$ und $x_2 = 3i + 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 34

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 2i - 1$, $a - b = -4i + 3$ und $ab = 5i + 1$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(-i+1)\cdot(-3i-2)}{(3i-2)\cdot(-3i-2)} = \frac{-i-5}{13} = -(\frac{1}{13}i + \frac{5}{13}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + (i - \frac{1}{2}))^2 = (10i + \frac{9}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x + (i - \frac{1}{2}))^2 = 40i + 9.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $40i+9$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = 40i + 9$$

äquivalent zum System

$$\left({*\atop *}\right) \qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = 9 \\ \quad 2uv = 40. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(4i + 5).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + (i - \frac{1}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i - 2$ und $x_2 = i + 3$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 35

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -i + 3$, $a - b = -3i - 1$ und $ab = -3i + 4$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(-2i + 1)\cdot(-i + 2)}{(i + 2)\cdot(-i + 2)} = \frac{-5i}{5} = -i.$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + (\frac{1}{2}i + 1))^2 = (6i + \frac{7}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x + (\frac{1}{2}i + 1))^2 = 24i + 7.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $24i+7$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = 24i + 7$$

äquivalent zum System

$$(\,{}^{*}_{*}\,) \qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = 7 \\ \qquad 2uv = 24. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i + 4).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + (\frac{1}{2}i + 1)) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i - 3$ und $x_2 = i + 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 36

Lösung.

(1) Es ist $a + b = i + 1$, $a - b = -3i + 3$ und $ab = 5i$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(-i+2)\cdot(-2i-1)}{(2i-1)\cdot(-2i-1)} = \frac{-3i-4}{5} = -(\frac{3}{5}i + \frac{4}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + (\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}))^2 = \frac{25}{2}i$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x + (\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}))^2 = 50i.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $50i$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = 50i$$

äquivalent zum System

$$(\,{}^{*}_{*}\,) \qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = 0 \\ \qquad 2uv = 50. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i + 5).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + (\frac{1}{2}i - \frac{1}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i - 2$ und $x_2 = 2i + 3$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 37

Lösung.

(1) Es ist $a + b = i + 4$, $a - b = 5i$ und $ab = 2i + 10$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(3i+2)\cdot(2i+2)}{(-2i+2)\cdot(2i+2)} = \frac{10i-2}{8} = (\frac{5}{4}i - \frac{1}{4}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (\frac{1}{2}i + 3))^2 = -\frac{25}{4}$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x - (\frac{1}{2}i + 3))^2 = -25.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn -25 das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -25$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = -25 \\ 2uv = 0. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (\frac{1}{2}i + 3)) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i + 3$ und $x_2 = 3i + 3$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 38

Lösung.

(1) Es ist $a + b = i + 4$, $a - b = 5i$ und $ab = 2i + 10$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(3i+2)\cdot(2i+2)}{(-2i+2)\cdot(2i+2)} = \frac{10i-2}{8} = (\frac{5}{4}i - \frac{1}{4}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (\frac{1}{2}i - 3))^2 = -\frac{9}{4}$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x - (\frac{1}{2}i - 3))^2 = -9.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn -9 das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi,$ daher

$$(u + vi)^2 = -9$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = -9 \\ \quad 2uv = 0. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (\frac{1}{2}i - 3)) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i - 3$ und $x_2 = 2i - 3$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 39

Lösung.

(1) Es ist $a + b = i - 5,$ $a - b = 5i + 1$ und $ab = -5i + 12.$

Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(3i - 2)\cdot(2i - 3)}{(-2i - 3)\cdot(2i - 3)} = \frac{-13i}{13} = -i.$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}))^2 = \frac{25}{2}i$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x - (\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}))^2 = 50i.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $50i$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi,$ daher

$$(u + vi)^2 = 50i$$

äquivalent zum System

$$(**)\quad \begin{cases} u^2 - v^2 = 0 \\ \quad 2uv = 50. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i + 5).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (\frac{1}{2}i - \frac{1}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i - 3$ und $x_2 = 3i + 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 40

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 5i - 4$, $a - b = i + 2$ und $ab = -11i - 3$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(3i-1)\cdot(-2i-3)}{(2i-3)\cdot(-2i-3)} = \frac{-7i+9}{13} = -(\frac{7}{13}i - \frac{9}{13}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (\frac{1}{2}i - \frac{5}{2}))^2 = (\frac{3}{2}i - 2)$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*)\quad 4\cdot(x - (\frac{1}{2}i - \frac{5}{2}))^2 = 6i - 8.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $6i - 8$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = 6i - 8$$

äquivalent zum System

$$(**)\quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -8 \\ \quad 2uv = 6. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i + 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (\frac{1}{2}i - \frac{5}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i - 3$ und $x_2 = 2i - 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 41

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 6$, $a - b = 2i$ und $ab = 10$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(i+3)\cdot(i+3)}{(-i+3)\cdot(i+3)} = \frac{6i+8}{10} = (\frac{3}{5}i + \frac{4}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + (i + \frac{1}{2}))^2 = (6i - \frac{7}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x + (i + \frac{1}{2}))^2 = 24i - 7.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $24i-7$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = 24i - 7$$

äquivalent zum System

$$(\substack{*\\*}) \qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = -7 \\ 2uv = 24. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(4i + 3).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + (i + \frac{1}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i - 2$ und $x_2 = i + 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 42

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 3i + 4$, $a - b = -i + 2$ und $ab = 7i + 1$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(i+3)\cdot(-2i+1)}{(2i+1)\cdot(-2i+1)} = \frac{-5i+5}{5} = -(i - 1).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x-(\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}))^2=-\frac{9}{2}i$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*)\qquad 4\cdot(x-(\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}))^2=-18i.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-18i$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2=u^2-v^2+2uvi,$ daher

$$(u+vi)^2=-18i$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*}\qquad \begin{cases} u^2-v^2=0 \\ \quad 2uv=-18. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u,v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z=u+vi=\pm(3i-3).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x-(\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}))=\pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1=-i+2$ und $x_2=2i-1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 43

Lösung.

(1) Es ist $a+b=-4,\ a-b=4i$ und $ab=8$.

Den Quotienten $\dfrac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}}=\frac{(2i-2)\cdot(2i-2)}{(-2i-2)\cdot(2i-2)}=\frac{-8i}{8}=-i.$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x-(\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}))^2=\frac{25}{2}i$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*)\qquad 4\cdot(x-(\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}))^2=50i.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $50i$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2=u^2-v^2+2uvi,$ daher

$$(u+vi)^2=50i$$

äquivalent zum System

$$(\ast\ast) \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = 0 \\ \quad 2uv = 50. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i + 5).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(\ast)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (\frac{1}{2}i - \frac{1}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i - 3$ und $x_2 = 3i + 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 44

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -i - 1$, $a - b = -3i + 5$ und $ab = 8i - 4$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(-2i + 2)\cdot(-i - 3)}{(i - 3)\cdot(-i - 3)} = \frac{4i - 8}{10} = (\frac{2}{5}i - \frac{4}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}))^2 = \frac{9}{2}i$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(\ast) \quad 4\cdot(x - (\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}))^2 = 18i.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $18i$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = 18i$$

äquivalent zum System

$$(\ast\ast) \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = 0 \\ \quad 2uv = 18. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i + 3).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(\ast)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (\frac{1}{2}i + \frac{1}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i-1$ und $x_2 = 2i+2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 45

Lösung.

(1) Es ist $a+b = i+5$, $a-b = -3i-1$ und $ab = i+8$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als
$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(-i+2)\cdot(-2i+3)}{(2i+3)\cdot(-2i+3)} = \frac{-7i+4}{13} = -(\frac{7}{13}i - \frac{4}{13}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch
$$(x+(\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}))^2 = \frac{9}{2}i$$
ausdrücken, gleichbedeutend als
$$(*) \qquad 4\cdot(x+(\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}))^2 = 18i.$$
Dies ist genau dann erfüllt, wenn $18i$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher
$$(u+vi)^2 = 18i$$
äquivalent zum System
$$(\substack{*\\*}) \qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = 0 \\ \quad 2uv = 18. \end{cases}$$
Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u,v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich
$$z = u+vi = \pm(3i+3).$$
Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher
$$2\cdot(x+(\frac{1}{2}i+\frac{1}{2})) = \pm z.$$
Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i-2$ und $x_2 = i+1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 46

Lösung.

(1) Es ist $a+b = i-4$, $a-b = -5i$ und $ab = -2i+10$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als
$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(-2i-2)\cdot(-3i-2)}{(3i-2)\cdot(-3i-2)} = \frac{10i-2}{13} = (\frac{10}{13}i - \frac{2}{13}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x+(\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}))^2=-\frac{9}{2}i$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x+(\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}))^2=-18i.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-18i$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2=u^2-v^2+2uvi$, daher

$$(u+vi)^2=-18i$$

äquivalent zum System

$$\left(\begin{smallmatrix}*\\ *\end{smallmatrix}\right) \qquad \begin{cases} u^2-v^2=0 \\ \quad 2uv=-18. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u,v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z=u+vi=\pm(3i-3).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x+(\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}))=\pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1=-2i+2$ und $x_2=i-1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 47

Lösung.

(1) Es ist $a+b=i-1$, $a-b=3i+3$ und $ab=-5i$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}}=\frac{(2i+1)\cdot(i-2)}{(-i-2)\cdot(i-2)}=\frac{-3i-4}{5}=-(\frac{3}{5}i+\frac{4}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x-(\frac{1}{2}i-\frac{3}{2}))^2=-(\frac{3}{2}i+2)$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x-(\frac{1}{2}i-\frac{3}{2}))^2=-6i-8.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-6i-8$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2=u^2-v^2+2uvi$, daher

$$(u+vi)^2=-6i-8$$

äquivalent zum System

$$(\ast)\quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -8 \\ \quad 2uv = -6. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i - 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(\ast)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (\frac{1}{2}i - \frac{3}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i - 1$ und $x_2 = 2i - 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 48

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -4,\ a - b = 6i$ und $ab = 13$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(3i-2)\cdot(3i-2)}{(-3i-2)\cdot(3i-2)} = \frac{-12i-5}{13} = -(\frac{12}{13}i + \frac{5}{13}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (\frac{1}{2}i + 2))^2 = (3i - \frac{5}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(\ast)\quad 4\cdot(x - (\frac{1}{2}i + 2))^2 = 12i - 5.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $12i-5$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi,$ daher

$$(u + vi)^2 = 12i - 5$$

äquivalent zum System

$$(\ast)\quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -5 \\ \quad 2uv = 12. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i + 2).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(\ast)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (\frac{1}{2}i + 2)) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i + 1$ und $x_2 = 2i + 3$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 49

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -i + 1,\ a - b = 3i - 3$ und $ab = 4i$.
Den Quotienten $\dfrac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(i-1)\cdot(2i+2)}{(-2i+2)\cdot(2i+2)} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}.$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (\frac{1}{2}i - \frac{3}{2}))^2 = -(\frac{3}{2}i + 2)$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x - (\frac{1}{2}i - \frac{3}{2}))^2 = -6i - 8.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-6i - 8$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -6i - 8$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = -8 \\ \quad\ 2uv = -6. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i - 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (\frac{1}{2}i - \frac{3}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i - 1$ und $x_2 = 2i - 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 50

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -4i + 5,\ a - b = -1$ und $ab = -10i + 2$.
Den Quotienten $\dfrac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(-2i+2)\cdot(2i+3)}{(-2i+3)\cdot(2i+3)} = \frac{-2i+10}{13} = -(\frac{2}{13}i - \frac{10}{13}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x-(\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}))^2=-\frac{9}{2}i$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x-(\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}))^2=-18i.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-18i$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2=u^2-v^2+2uvi$, daher

$$(u+vi)^2=-18i$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \qquad \begin{cases} u^2-v^2=0 \\ \quad 2uv=-18. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u,v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z=u+vi=\pm(3i-3).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x-(\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}))=\pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1=-i+1$ und $x_2=2i-2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 51

Lösung.

(1) Es ist $a+b=0$, $a-b=-4i+2$ und $ab=4i+3$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}}=\frac{(-2i+1)\cdot(-2i-1)}{(2i-1)\cdot(-2i-1)}=\frac{-5}{5}=-1.$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x+(i-\frac{1}{2}))^2=-(6i+\frac{7}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x+(i-\frac{1}{2}))^2=-24i-7.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-24i-7$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2=u^2-v^2+2uvi$, daher

$$(u+vi)^2=-24i-7$$

äquivalent zum System

$$(\ast\ast)\quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -7 \\ \quad 2uv = -24. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(4i - 3).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(\ast)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + (i - \frac{1}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i + 2$ und $x_2 = i - 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 52

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -i + 4$, $a - b = -5i - 2$ und $ab = -7i + 9$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(-3i+1)\cdot(-2i+3)}{(2i+3)\cdot(-2i+3)} = \frac{-11i-3}{13} = -(\frac{11}{13}i + \frac{3}{13}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (i - \frac{5}{2}))^2 = -(2i + \frac{15}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(\ast)\quad 4\cdot(x - (i - \frac{5}{2}))^2 = -8i - 15.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-8i - 15$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist $(u, v \in \mathbb{R})$. Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -8i - 15$$

äquivalent zum System

$$(\ast\ast)\quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -15 \\ \quad 2uv = -8. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(4i - 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(\ast)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (i - \frac{5}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i - 2$ und $x_2 = 3i - 3$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 53

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -3i - 2$, $a - b = i + 4$ und $ab = i - 5$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(-i+1)\cdot(2i-3)}{(-2i-3)\cdot(2i-3)} = \frac{5i-1}{13} = (\frac{5}{13}i - \frac{1}{13}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + (\frac{1}{2}i + 2))^2 = (3i - \frac{5}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x + (\frac{1}{2}i + 2))^2 = 12i - 5.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $12i-5$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = 12i - 5$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = -5 \\ 2uv = 12. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i + 2).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + (\frac{1}{2}i + 2)) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i - 3$ und $x_2 = i - 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 54

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 0$, $a - b = -2i + 2$ und $ab = 2i$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(-i+1)\cdot(-i-1)}{(i-1)\cdot(-i-1)} = \frac{-2}{2} = -1.$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + \frac{1}{2}i)^2 = -(3i + \frac{5}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x + \frac{1}{2}i)^2 = -12i - 5.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-12i - 5$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -12i - 5$$

äquivalent zum System

$$\left(\begin{smallmatrix}*\\ *\end{smallmatrix}\right) \qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = -5 \\ \quad 2uv = -12. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i - 2).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + \frac{1}{2}i) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i + 1$ und $x_2 = i - 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 55

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -4i + 2$, $a - b = 4$ und $ab = -4i - 7$.

Den Quotienten $\dfrac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(-2i + 3)\cdot(2i - 1)}{(-2i - 1)\cdot(2i - 1)} = \frac{8i + 1}{5} = (\frac{8}{5}i + \frac{1}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + \frac{1}{2}i)^2 = -(3i + \frac{5}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x + \frac{1}{2}i)^2 = -12i - 5.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-12i - 5$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -12i - 5$$

äquivalent zum System

$$(**) \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -5 \\ \quad\; 2uv = -12. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i - 2).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + \frac{1}{2}i) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i + 1$ und $x_2 = i - 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 56

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 4i + 5$, $a - b = 1$ und $ab = 10i + 2$.

Den Quotienten $\dfrac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(2i+3)\cdot(-2i+2)}{(2i+2)\cdot(-2i+2)} = \frac{-2i+10}{8} = -(\frac{1}{4}i - \frac{5}{4}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + (\frac{1}{2}i - 2))^2 = -(3i + \frac{5}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4\cdot(x + (\frac{1}{2}i - 2))^2 = -12i - 5.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-12i - 5$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist $(u, v \in \mathbb{R})$. Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -12i - 5$$

äquivalent zum System

$$(**) \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -5 \\ \quad\; 2uv = -12. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i - 2).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + (\frac{1}{2}i - 2)) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i + 3$ und $x_2 = i + 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 57

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -3i,\ a - b = -i - 6$ und $ab = -3i - 11$.

Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(-2i-3)\cdot(i+3)}{(-i+3)\cdot(i+3)} = \frac{-9i-7}{10} = -(\frac{9}{10}i + \frac{7}{10}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (\frac{1}{2}i + 1))^2 = (10i - \frac{9}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x - (\frac{1}{2}i + 1))^2 = 40i - 9.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $40i-9$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi,$ daher

$$(u + vi)^2 = 40i - 9$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = -9 \\ \quad 2uv = 40. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i + 4).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (\frac{1}{2}i + 1)) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i - 1$ und $x_2 = 3i + 3$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 58

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 5,\ a - b = -2i - 1$ und $ab = -i + 7$.

Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(-i+2)\cdot(-i+3)}{(i+3)\cdot(-i+3)} = \frac{-5i+5}{10} = -(\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x-(i+\frac{1}{2}))^2 = -(6i+\frac{7}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x-(i+\frac{1}{2}))^2 = -24i-7.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-24i-7$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u+vi)^2 = -24i-7$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = -7 \\ \quad 2uv = -24. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u+vi = \pm(4i-3).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x-(i+\frac{1}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i+2$ und $x_2 = 3i-1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 59

Lösung.

(1) Es ist $a+b=5$, $a-b=2i+1$ und $ab=-i+7$.

Den Quotienten $\dfrac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(i+3)\cdot(i+2)}{(-i+2)\cdot(i+2)} = \frac{5i+5}{5} = (i+1).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x-\frac{1}{2}i)^2 = (3i-\frac{5}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x-\frac{1}{2}i)^2 = 12i-5.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $12i-5$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u+vi)^2 = 12i-5$$

äquivalent zum System

$$(\ast)\quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -5 \\ \quad 2uv = 12. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i + 2).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(\ast)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - \frac{1}{2}i) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i - 1$ und $x_2 = 2i + 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 60

Lösung.

(1) Es ist $a + b = i - 1$, $a - b = 5i + 5$ und $ab = -13i$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(3i + 2)\cdot(2i - 3)}{(-2i - 3)\cdot(2i - 3)} = \frac{-5i - 12}{13} = -(\frac{5}{13}i + \frac{12}{13}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + (i + \frac{1}{2}))^2 = (6i - \frac{7}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(\ast)\qquad 4\cdot(x + (i + \frac{1}{2}))^2 = 24i - 7.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $24i-7$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = 24i - 7$$

äquivalent zum System

$$(\ast)\quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -7 \\ \quad 2uv = 24. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(4i + 3).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(\ast)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + (i + \frac{1}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i - 2$ und $x_2 = i + 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 61

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 4i + 2$, $a - b = 2i + 4$ und $ab = -6$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(3i+3)\cdot(-i-1)}{(i-1)\cdot(-i-1)} = \frac{-6i}{2} = -3i.$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + (\frac{1}{2}i + 1))^2 = -(10i + \frac{9}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x + (\frac{1}{2}i + 1))^2 = -40i - 9.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-40i - 9$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -40i - 9$$

äquivalent zum System

$$\left(\begin{smallmatrix} * \\ * \end{smallmatrix}\right) \qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = -9 \\ \quad 2uv = -40. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i - 4).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + (\frac{1}{2}i + 1)) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i + 1$ und $x_2 = 2i - 3$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 62

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -2i + 2$, $a - b = 4i$ und $ab = -2i + 4$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(i+1)\cdot(3i+1)}{(-3i+1)\cdot(3i+1)} = \frac{4i-2}{10} = (\frac{2}{5}i - \frac{1}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (\frac{1}{2}i + \frac{3}{2}))^2 = -(\frac{3}{2}i + 2)$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x - (\frac{1}{2}i + \frac{3}{2}))^2 = -6i - 8.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-6i - 8$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -6i - 8$$

äquivalent zum System

$$({*\atop *}) \qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = -8 \\ \quad 2uv = -6. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i - 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (\frac{1}{2}i + \frac{3}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i + 2$ und $x_2 = 2i + 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 63

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 2i + 2$, $a - b = -4i - 4$ und $ab = -6i$.

Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(-i-1)\cdot(-3i+3)}{(3i+3)\cdot(-3i+3)} = \frac{-6}{18} = -\frac{1}{3}.$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + \frac{1}{2}i)^2 = -(15i - \frac{11}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x + \frac{1}{2}i)^2 = -60i + 11.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-60i + 11$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -60i + 11$$

äquivalent zum System

$$(\ast\ast)\quad \begin{cases} u^2 - v^2 = 11 \\ 2uv = -60. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i - 6).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(\ast)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + \frac{1}{2}i) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i + 3$ und $x_2 = 2i - 3$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 64

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 0$, $a - b = 6i + 2$ und $ab = -6i + 8$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(3i+1)\cdot(3i-1)}{(-3i-1)\cdot(3i-1)} = \frac{-10}{10} = -1.$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}))^2 = -\frac{25}{2}i$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(\ast)\quad 4\cdot(x - (\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}))^2 = -50i.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-50i$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -50i$$

äquivalent zum System

$$(\ast\ast)\quad \begin{cases} u^2 - v^2 = 0 \\ 2uv = -50. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i - 5).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(\ast)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (\frac{1}{2}i - \frac{1}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i + 2$ und $x_2 = 3i - 3$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 65

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 1$, $a - b = -6i - 3$ und $ab = -9i + 7$.
Den Quotienten $\dfrac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(-3i-1)\cdot(-3i+2)}{(3i+2)\cdot(-3i+2)} = \frac{-3i-11}{13} = -(\frac{3}{13}i + \frac{11}{13}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + (i + \frac{1}{2}))^2 = (6i - \frac{7}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x + (i + \frac{1}{2}))^2 = 24i - 7.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $24i-7$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = 24i - 7$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = -7 \\ \quad 2uv = 24. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(4i + 3).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + (i + \frac{1}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i - 2$ und $x_2 = i + 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 66

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -i - 4$, $a - b = 3i + 2$ und $ab = -i + 5$.
Den Quotienten $\dfrac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(i-1)\cdot(2i-3)}{(-2i-3)\cdot(2i-3)} = \frac{-5i+1}{13} = -(\frac{5}{13}i - \frac{1}{13}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x+(\frac{1}{2}i-2))^2=(5i-\frac{21}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x+(\frac{1}{2}i-2))^2=20i-21.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $20i-21$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2=u^2-v^2+2uvi$, daher

$$(u+vi)^2=20i-21$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \qquad \begin{cases} u^2-v^2=-21 \\ 2uv=20. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u,v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z=u+vi=\pm(5i+2).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x+(\frac{1}{2}i-2))=\pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1=-3i+1$ und $x_2=2i+3$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 67

Lösung.

(1) Es ist $a+b=i-2$, $a-b=-5i-4$ und $ab=-11i+3$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}}=\frac{(-2i-3)\cdot(-3i+1)}{(3i+1)\cdot(-3i+1)}=\frac{7i-9}{10}=(\frac{7}{10}i-\frac{9}{10}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x-\frac{1}{2}i)^2=-(9i-\frac{27}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x-\frac{1}{2}i)^2=-36i+27.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-36i+27$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2=u^2-v^2+2uvi$, daher

$$(u+vi)^2=-36i+27$$

äquivalent zum System

$$(\ast\ast)\quad \begin{cases} u^2 - v^2 = 27 \\ \quad 2uv = -36. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i - 6).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(\ast)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - \frac{1}{2}i) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i + 3$ und $x_2 = 2i - 3$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 68

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 5i + 2$, $a - b = i - 4$ und $ab = 7i - 9$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(3i-1)\cdot(-2i+3)}{(2i+3)\cdot(-2i+3)} = \frac{11i+3}{13} = (\frac{11}{13}i + \frac{3}{13}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + (\frac{1}{2}i + 1))^2 = -(6i - \frac{7}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(\ast)\quad 4\cdot(x + (\frac{1}{2}i + 1))^2 = -24i + 7.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-24i + 7$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -24i + 7$$

äquivalent zum System

$$(\ast\ast)\quad \begin{cases} u^2 - v^2 = 7 \\ \quad 2uv = -24. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i - 4).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(\ast)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + (\frac{1}{2}i + 1)) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i + 1$ und $x_2 = i - 3$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 69

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 4i$, $a - b = 2i - 4$ und $ab = 4i - 7$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(3i-2)\cdot(-i+2)}{(i+2)\cdot(-i+2)} = \frac{8i-1}{5} = (\frac{8}{5}i - \frac{1}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + \frac{1}{2}i)^2 = -(9i - \frac{27}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x + \frac{1}{2}i)^2 = -36i + 27.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-36i + 27$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -36i + 27$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = 27 \\ \quad 2uv = -36. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i - 6).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + \frac{1}{2}i) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i + 3$ und $x_2 = i - 3$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 70

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 3i - 2$, $a - b = i - 4$ und $ab = -i - 5$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(2i-3)\cdot(-i+1)}{(i+1)\cdot(-i+1)} = \frac{5i-1}{2} = (\frac{5}{2}i - \frac{1}{2}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x-(i+\frac{1}{2}))^2 = -(10i-\frac{9}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x-(i+\frac{1}{2}))^2 = -40i+9.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-40i+9$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2 = u^2-v^2+2uvi$, daher

$$(u+vi)^2 = -40i+9$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \qquad \begin{cases} u^2-v^2=9 \\ \quad 2uv=-40. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u,v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z=u+vi=\pm(4i-5).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x-(i+\frac{1}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1=-i+3$ und $x_2=3i-2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 71

Lösung.

(1) Es ist $a+b=4i-1$, $a-b=3$ und $ab=-2i-6$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(2i+1)\cdot(-2i-2)}{(2i-2)\cdot(-2i-2)} = \frac{-6i+2}{8} = -(\frac{3}{4}i-\frac{1}{4}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x-(\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}))^2 = \frac{9}{2}i$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x-(\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}))^2 = 18i.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $18i$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2=u^2-v^2+2uvi$, daher

$$(u+vi)^2 = 18i$$

äquivalent zum System

$$\left(\substack{*\\ *}\right) \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = 0 \\ \quad 2uv = 18. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i + 3).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (\frac{1}{2}i + \frac{1}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i - 1$ und $x_2 = 2i + 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 72

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 0$, $a - b = -6i + 4$ und $ab = 12i + 5$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(-3i + 2)\cdot(-3i - 2)}{(3i - 2)\cdot(-3i - 2)} = \frac{-13}{13} = -1.$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - \frac{1}{2}i)^2 = (10i - \frac{9}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x - \frac{1}{2}i)^2 = 40i - 9.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $40i-9$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = 40i - 9$$

äquivalent zum System

$$\left(\substack{*\\ *}\right) \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -9 \\ \quad 2uv = 40. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i + 4).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - \frac{1}{2}i) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i - 2$ und $x_2 = 3i + 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 73

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -4i - 4$, $a - b = -2$ und $ab = 8i - 1$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(-2i-3)\cdot(2i-1)}{(-2i-1)\cdot(2i-1)} = \frac{-4i+7}{5} = -(\frac{4}{5}i - \frac{7}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}))^2 = -(\frac{15}{2}i + 4)$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x - (\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}))^2 = -30i - 16.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-30i - 16$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -30i - 16$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = -16 \\ \qquad 2uv = -30. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i - 3).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (\frac{1}{2}i + \frac{1}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i + 2$ und $x_2 = 3i - 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 74

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 3i$, $a - b = i + 2$ und $ab = -i - 3$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(2i+1)\cdot(-i-1)}{(i-1)\cdot(-i-1)} = \frac{-3i+1}{2} = -(\frac{3}{2}i - \frac{1}{2}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x-\frac{1}{2}i)^2 = -(10i+\frac{9}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x-\frac{1}{2}i)^2 = -40i-9.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-40i-9$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2 = u^2-v^2+2uvi$, daher

$$(u+vi)^2 = -40i-9$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \qquad \begin{cases} u^2-v^2=-9 \\ \quad 2uv=-40. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u,v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u+vi = \pm(5i-4).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x-\frac{1}{2}i) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1=-2i+2$ und $x_2=3i-2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 75

Lösung.

(1) Es ist $a+b=-5$, $a-b=6i+1$ und $ab=-3i+15$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(3i-2)\cdot(3i-3)}{(-3i-3)\cdot(3i-3)} = \frac{-15i-3}{18} = -(\frac{5}{6}i+\frac{1}{6}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x+(\frac{1}{2}i-\frac{3}{2}))^2 = -(\frac{5}{2}i+6)$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x+(\frac{1}{2}i-\frac{3}{2}))^2 = -10i-24.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-10i-24$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2=u^2-v^2+2uvi$, daher

$$(u+vi)^2 = -10i-24$$

äquivalent zum System

$$(*)\quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -24 \\ \quad 2uv = -10. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i - 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + (\frac{1}{2}i - \frac{3}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i + 2$ und $x_2 = 2i + 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 76

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 3$, $a - b = 6i + 1$ und $ab = -3i + 11$.

Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(3i+2)\cdot(3i+1)}{(-3i+1)\cdot(3i+1)} = \frac{9i-7}{10} = (\frac{9}{10}i - \frac{7}{10}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - \frac{1}{2}i)^2 = -(6i - \frac{7}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*)\quad 4\cdot(x - \frac{1}{2}i)^2 = -24i + 7.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-24i + 7$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -24i + 7$$

äquivalent zum System

$$(*)\quad \begin{cases} u^2 - v^2 = 7 \\ \quad 2uv = -24. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i - 4).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - \frac{1}{2}i) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i + 2$ und $x_2 = 2i - 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 77

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -5i - 3$, $a - b = i - 1$ und $ab = 8i - 4$.
Den Quotienten $\dfrac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(-2i-2)\cdot(3i-1)}{(-3i-1)\cdot(3i-1)} = \frac{-4i+8}{10} = -(\frac{2}{5}i - \frac{4}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}))^2 = -\frac{25}{2}i$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x - (\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}))^2 = -50i.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-50i$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -50i$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = 0 \\ \quad 2uv = -50. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i - 5).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (\frac{1}{2}i - \frac{1}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i + 2$ und $x_2 = 3i - 3$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 78

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -i - 2$, $a - b = -3i$ und $ab = i + 3$.
Den Quotienten $\dfrac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(-2i-1)\cdot(-i-1)}{(i-1)\cdot(-i-1)} = \frac{3i-1}{2} = (\frac{3}{2}i - \frac{1}{2}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + (\frac{1}{2}i - 2))^2 = -\frac{25}{4}$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4 \cdot (x + (\frac{1}{2}i - 2))^2 = -25.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn -25 das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -25$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = -25 \\ \quad 2uv = 0. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2 \cdot (x + (\frac{1}{2}i - 2)) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i + 2$ und $x_2 = 2i + 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 79

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -6i + 3$, $a - b = 1$ und $ab = -9i - 7$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(-3i + 2) \cdot (3i + 1)}{(-3i + 1) \cdot (3i + 1)} = \frac{3i + 11}{10} = (\frac{3}{10}i + \frac{11}{10}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (\frac{1}{2}i - 1))^2 = -(6i - \frac{7}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4 \cdot (x - (\frac{1}{2}i - 1))^2 = -24i + 7.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-24i + 7$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -24i + 7$$

äquivalent zum System

$$(\ast_\ast) \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = 7 \\ \quad 2uv = -24. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i - 4).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(\ast)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (\frac{1}{2}i - 1)) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i + 1$ und $x_2 = 2i - 3$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 80

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -4i - 1$, $a - b = -2i - 5$ und $ab = -3i - 9$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(-3i - 3)\cdot(i + 2)}{(-i + 2)\cdot(i + 2)} = \frac{-9i - 3}{5} = -(\frac{9}{5}i + \frac{3}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + (\frac{1}{2}i + 1))^2 = (6i + \frac{7}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(\ast) \quad 4\cdot(x + (\frac{1}{2}i + 1))^2 = 24i + 7.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $24i+7$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = 24i + 7$$

äquivalent zum System

$$(\ast_\ast) \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = 7 \\ \quad 2uv = 24. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i + 4).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(\ast)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + (\frac{1}{2}i + 1)) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i - 3$ und $x_2 = i + 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 81

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -2,\ a - b = -6i$ und $ab = 10$.

Den Quotienten $\dfrac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(-3i-1)\cdot(-3i-1)}{(3i-1)\cdot(-3i-1)} = \frac{6i-8}{10} = (\frac{3}{5}i - \frac{4}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + (\frac{1}{2}i + 2))^2 = -\frac{9}{4}$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x + (\frac{1}{2}i + 2))^2 = -9.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn -9 das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -9$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = -9 \\ \quad 2uv = 0. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + (\frac{1}{2}i + 2)) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i - 2$ und $x_2 = i - 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 82

Lösung.

(1) Es ist $a + b = i + 2,\ a - b = 3i - 4$ und $ab = 7i - 1$.

Den Quotienten $\dfrac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(2i-1)\cdot(i+3)}{(-i+3)\cdot(i+3)} = \frac{5i-5}{10} = (\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + \frac{1}{2}i)^2 = -(6i - \frac{7}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x + \frac{1}{2}i)^2 = -24i + 7.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-24i + 7$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -24i + 7$$

äquivalent zum System

$$\left({*\atop *}\right) \qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = 7 \\ \quad 2uv = -24. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i - 4).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + \frac{1}{2}i) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i + 2$ und $x_2 = i - 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 83

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 2$, $a - b = 6i - 4$ und $ab = 12i + 6$.

Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(3i-1)\cdot(3i+3)}{(-3i+3)\cdot(3i+3)} = \frac{6i-12}{18} = (\frac{1}{3}i - \frac{2}{3}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - \frac{1}{2}i)^2 = (5i - \frac{21}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x - \frac{1}{2}i)^2 = 20i - 21.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $20i - 21$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = 20i - 21$$

äquivalent zum System

$$(*)\quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -21 \\ \quad 2uv = 20. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i + 2).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - \frac{1}{2}i) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i - 1$ und $x_2 = 3i + 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 84

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -1$, $a - b = -6i - 3$ und $ab = -9i + 7$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(-3i - 2)\cdot(-3i + 1)}{(3i + 1)\cdot(-3i + 1)} = \frac{3i - 11}{10} = (\frac{3}{10}i - \frac{11}{10}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + (\frac{1}{2}i - \frac{3}{2}))^2 = -(\frac{5}{2}i + 6)$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*)\quad 4\cdot(x + (\frac{1}{2}i - \frac{3}{2}))^2 = -10i - 24.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-10i - 24$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist $(u, v \in \mathbb{R})$. Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -10i - 24$$

äquivalent zum System

$$(*)\quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -24 \\ \quad 2uv = -10. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i - 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + (\frac{1}{2}i - \frac{3}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i + 2$ und $x_2 = 2i + 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 85

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 2i + 6,\ a - b = 4i$ und $ab = 6i + 12$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(3i+3)\cdot(i+3)}{(-i+3)\cdot(i+3)} = \frac{12i+6}{10} = (\frac{6}{5}i + \frac{3}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + (i + \frac{5}{2}))^2 = -(2i + \frac{15}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x + (i + \frac{5}{2}))^2 = -8i - 15.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-8i - 15$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -8i - 15$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = -15 \\ \quad 2uv = -8. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(4i - 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + (i + \frac{5}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i - 2$ und $x_2 = i - 3$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 86

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -i - 3,\ a - b = 3i + 1$ und $ab = 4$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(i-1)\cdot(2i-2)}{(-2i-2)\cdot(2i-2)} = \frac{-4i}{8} = -\frac{1}{2}i.$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - \frac{1}{2}i)^2 = -(5i + \frac{21}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x - \frac{1}{2}i)^2 = -20i - 21.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-20i - 21$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -20i - 21$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = -21 \\ \quad 2uv = -20. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i - 2).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - \frac{1}{2}i) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i + 1$ und $x_2 = 3i - 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 87

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -4i + 3$, $a - b = 2i - 1$ und $ab = -5i - 1$.

Den Quotienten $\dfrac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(-i + 1)\cdot(3i + 2)}{(-3i + 2)\cdot(3i + 2)} = \frac{i + 5}{13} = (\frac{1}{13}i + \frac{5}{13}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (\frac{1}{2}i + 2))^2 = (3i - \frac{5}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x - (\frac{1}{2}i + 2))^2 = 12i - 5.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $12i{-}5$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u{+}vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = 12i - 5$$

äquivalent zum System

$$(\genfrac{}{}{0pt}{}{*}{*}) \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -5 \\ \quad 2uv = 12. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i + 2).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (\frac{1}{2}i + 2)) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i + 1$ und $x_2 = 2i + 3$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 88

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -i,\ a - b = -3i + 6$ und $ab = 9i - 7$.

Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(-2i+3)\cdot(-i-3)}{(i-3)\cdot(-i-3)} = \frac{3i-11}{10} = (\frac{3}{10}i - \frac{11}{10}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (i - \frac{5}{2}))^2 = (2i - \frac{15}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x - (i - \frac{5}{2}))^2 = 8i - 15.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $8i-15$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi,$ daher

$$(u + vi)^2 = 8i - 15$$

äquivalent zum System

$$(\genfrac{}{}{0pt}{}{*}{*}) \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -15 \\ \quad 2uv = 8. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(4i + 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (i - \frac{5}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i - 3$ und $x_2 = 3i - 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 89

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 0$, $a - b = 2i - 4$ und $ab = 4i - 3$.

Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(i-2)\cdot(i+2)}{(-i+2)\cdot(i+2)} = \frac{-5}{5} = -1.$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}))^2 = (\frac{15}{2}i + 4)$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x - (\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}))^2 = 30i + 16.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $30i + 16$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = 30i + 16$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = 16 \\ \quad 2uv = 30. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i + 5).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (\frac{1}{2}i + \frac{1}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i - 2$ und $x_2 = 2i + 3$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 90

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 4i - 2$, $a - b = -4$ und $ab = -4i - 7$.

Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(2i-3)\cdot(-2i+1)}{(2i+1)\cdot(-2i+1)} = \frac{8i+1}{5} = (\frac{8}{5}i + \frac{1}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x-(\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}))^2=\frac{9}{2}i$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*)\qquad 4\cdot(x-(\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}))^2=18i.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $18i$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2=u^2-v^2+2uvi$, daher

$$(u+vi)^2=18i$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*}\qquad \begin{cases} u^2-v^2=0\\ 2uv=18.\end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u,v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z=u+vi=\pm(3i+3).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x-(\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}))=\pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1=-i-2$ und $x_2=2i+1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 91

Lösung.

(1) Es ist $a+b=-4$, $a-b=-4i+2$ und $ab=4i+7$.

Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}}=\frac{(-2i-1)\cdot(-2i-3)}{(2i-3)\cdot(-2i-3)}=\frac{8i-1}{13}=(\frac{8}{13}i-\frac{1}{13}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x+(\frac{1}{2}i-1))^2=-(10i+\frac{9}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*)\qquad 4\cdot(x+(\frac{1}{2}i-1))^2=-40i-9.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-40i-9$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2=u^2-v^2+2uvi$, daher

$$(u+vi)^2=-40i-9$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -9 \\ \quad 2uv = -40. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i - 4).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + (\frac{1}{2}i - 1)) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i + 3$ und $x_2 = 2i - 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 92

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 3i + 4$, $a - b = i + 2$ und $ab = 5i + 1$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(2i+3)\cdot(-i+1)}{(i+1)\cdot(-i+1)} = \frac{-i+5}{2} = -(\frac{1}{2}i - \frac{5}{2}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (i + \frac{5}{2}))^2 = (2i - \frac{15}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4\cdot(x - (i + \frac{5}{2}))^2 = 8i - 15.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $8i-15$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = 8i - 15$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -15 \\ \quad 2uv = 8. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(4i + 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (i + \frac{5}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i + 2$ und $x_2 = 3i + 3$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 93

Lösung.

(1) Es ist $a + b = i + 1$, $a - b = -3i + 3$ und $ab = 5i$.
Den Quotienten $\dfrac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(-i+2)\cdot(-2i-1)}{(2i-1)\cdot(-2i-1)} = \frac{-3i-4}{5} = -(\frac{3}{5}i + \frac{4}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (\frac{1}{2}i - \frac{3}{2}))^2 = -(\frac{5}{2}i + 6)$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x - (\frac{1}{2}i - \frac{3}{2}))^2 = -10i - 24.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-10i - 24$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -10i - 24$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = -24 \\ \quad 2uv = -10. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i - 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (\frac{1}{2}i - \frac{3}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i - 1$ und $x_2 = 3i - 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 94

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 5i + 4$, $a - b = -i + 2$ und $ab = 11i - 3$.
Den Quotienten $\dfrac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(2i+3)\cdot(-3i+1)}{(3i+1)\cdot(-3i+1)} = \frac{-7i+9}{10} = -(\frac{7}{10}i - \frac{9}{10}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - \frac{1}{2}i)^2 = -(10i + \frac{9}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x - \frac{1}{2}i)^2 = -40i - 9.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-40i - 9$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -40i - 9$$

äquivalent zum System

$$(\substack{*\\*}) \qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = -9 \\ \quad 2uv = -40. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i - 4).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - \frac{1}{2}i) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i + 2$ und $x_2 = 3i - 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 95

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 4i - 4$, $a - b = -2i + 2$ und $ab = -6i$.

Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(i-1)\cdot(-3i-3)}{(3i-3)\cdot(-3i-3)} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}.$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + (i - \frac{5}{2}))^2 = (2i - \frac{15}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x + (i - \frac{5}{2}))^2 = 8i - 15.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $8i-15$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = 8i - 15$$

äquivalent zum System

$$(\ast\ast)\qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = -15 \\ \qquad 2uv = 8. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(4i + 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(\ast)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + (i - \frac{5}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i + 2$ und $x_2 = i + 3$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 96

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 2i - 1$, $a - b = 4i - 3$ und $ab = 5i + 1$.
Den Quotienten $\dfrac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(3i-2)\cdot(i+1)}{(-i+1)\cdot(i+1)} = \frac{i-5}{2} = (\frac{1}{2}i - \frac{5}{2}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + (\frac{1}{2}i - 1))^2 = (6i + \frac{7}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(\ast)\qquad 4\cdot(x + (\frac{1}{2}i - 1))^2 = 24i + 7.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $24i+7$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = 24i + 7$$

äquivalent zum System

$$(\ast\ast)\qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = 7 \\ \qquad 2uv = 24. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i + 4).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(\ast)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + (\frac{1}{2}i - 1)) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i - 1$ und $x_2 = i + 3$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 97

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 6i - 1$, $a - b = 5$ und $ab = -3i - 15$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(3i+2)\cdot(-3i-3)}{(3i-3)\cdot(-3i-3)} = \frac{-15i+3}{18} = -(\frac{5}{6}i - \frac{1}{6}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + (\frac{1}{2}i - \frac{3}{2}))^2 = -(\frac{5}{2}i + 6)$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x + (\frac{1}{2}i - \frac{3}{2}))^2 = -10i - 24.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-10i - 24$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -10i - 24$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = -24 \\ \quad 2uv = -10. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i - 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + (\frac{1}{2}i - \frac{3}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i + 2$ und $x_2 = 2i + 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 98

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -2i - 2$, $a - b = 4i + 4$ und $ab = -6i$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(i+1)\cdot(3i-3)}{(-3i-3)\cdot(3i-3)} = \frac{-6}{18} = -\frac{1}{3}.$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + (i - \frac{5}{2}))^2 = (2i - \frac{15}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x + (i - \frac{5}{2}))^2 = 8i - 15.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $8i-15$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi,$ daher

$$(u + vi)^2 = 8i - 15$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = -15 \\ \quad 2uv = 8. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(4i + 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + (i - \frac{5}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i + 2$ und $x_2 = i + 3$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 2 Exemplar 99

Lösung.

(1) Es ist $a + b = i - 3,$ $a - b = -3i + 1$ und $ab = 4.$

Den Quotienten $\dfrac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(-i - 1)\cdot(-2i - 2)}{(2i - 2)\cdot(-2i - 2)} = \frac{4i}{8} = \frac{1}{2}i.$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + (\frac{1}{2}i + 1))^2 = -(6i - \frac{7}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x + (\frac{1}{2}i + 1))^2 = -24i + 7.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-24i + 7$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi,$ daher

$$(u + vi)^2 = -24i + 7$$

äquivalent zum System

$$(**)\qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = 7 \\ \qquad 2uv = -24. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i - 4).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + (\frac{1}{2}i + 1)) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i + 1$ und $x_2 = i - 3$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.