Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 1 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = 3i - 2,\ b = -3i - 1 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - (i + 1)x - (7i - 4) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 2 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = -3i + 2,\ b = 3i - 1 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 + (i - 3)x - (3i - 4) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 3 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = -3i + 3,\ b = 3i - 1 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - (i + 2)x + (7i - 1) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 4 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = -3i - 1,\ b = 2i - 1 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 + (2i - 1)x - (7i - 1) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 5 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = -2i - 2,\ b = i + 1 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - (2i - 5)x - (3i - 9) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 6 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = -3i - 1,\ b = -2i + 1 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - (2i - 1)x - (7i - 1) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 7 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = -3i + 2,\ b = 3i - 3 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a+b,\ a-b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 + (i+4)x + (5i+5) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 8 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = i + 3,\ b = 3i + 3 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - (2i + 5)x + (7i + 9) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 9 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = 3i + 3,\ b = -3i + 3 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - (i + 3)x - (i - 8) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 10 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = i - 2,\ b = -2i + 3 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 + ix + (10i + 2) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 11 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = i + 3,\ b = 2i - 1 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - ix + (6i - 2) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 12 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = i + 1,\ b = 3i + 1 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - (2i - 1)x - (11i + 3) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 13 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = 2i + 1,\ b = -i - 1 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 + (i - 5)x + 12 = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 14 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = 3i + 3,\ b = 3i - 2 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 + (2i - 1)x - (7i - 1) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 15 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = -2i - 3,\ b = 2i + 1 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - (i - 2)x + (9i + 3) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 16 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = -i - 2,\ b = 3i + 3 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - (i + 2)x - (5i + 1) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 17 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = -2i - 1,\ b = -2i - 2 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - (i - 2)x - (7i + 1) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 18 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = 3i - 1,\ b = i + 3 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 + ix - (6i + 2) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 19 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = -i + 2,\ b = -i + 3 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 + (2i - 5)x - (3i - 9) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 20 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = -i + 1,\ b = 3i + 3 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 + ix + (5i + 5) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 21 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) a, b bezeichnen $a = -i+2$, $b = -2i-1 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a+b$, $a-b$, ab und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - (i+4)x + (7i+9) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 22 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = -3i - 2,\ b = 2i - 2 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a+b,\ a-b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 + (i+3)x + (3i+4) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 23 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = 2i + 1,\ b = -3i - 2 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - (2i - 1)x - (11i + 3) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 24 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = 2i + 3,\ b = -2i + 1 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - (2i + 1)x + (7i + 1) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 25 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = 2i + 2,\ b = -3i + 1 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 + (i - 1)x + (7i - 4) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 26 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = -2i - 3,\ b = i - 2 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - (i - 4)x + (i + 5) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 27 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = 3i - 1,\ b = -2i + 1 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 + (i + 4)x - (i - 5) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 28 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = -2i - 2,\ b = 3i - 3 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a+b,\ a-b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - (2i+3)x + (i+5) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 29 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = 2i - 3,\ b = -i + 1 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - (i - 3)x - (4i - 8) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 30 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = -3i + 1,\ b = -2i + 1 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - (i + 5)x + (5i + 12) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 31 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) a, b bezeichnen $a = -i+3$, $b = -3i+3 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a+b$, $a-b$, ab und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 + (i-4)x + (3i+9) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 32 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = 2i + 1,\ b = 2i - 2 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - (2i - 1)x + (5i + 1) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 33 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = -3i - 2,\ b = -3i + 1 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 + (i - 1)x + (7i + 4) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 34 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = -3i - 2,\ b = -2i + 3 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - (i + 2)x + (11i + 3) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 35 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = -3i - 1,\ b = 3i - 2 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - (i + 1)x - (7i + 4) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 36 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = i - 3,\ b = -i + 3 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - (i - 1)x + (7i + 4) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 37 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = 3i - 3,\ b = i + 2 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - ix + (3i + 1) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 38 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) a, b bezeichnen $a = -3i + 2$, $b = -i + 1 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b$, $a - b$, ab und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - (i - 1)x - (8i - 4) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 39 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = 3i + 1,\ b = i + 2 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - (2i - 1)x + (5i + 1) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 40 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = -3i + 3,\ b = i + 3 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 + (i + 1)x - (7i - 4) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 41 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = 2i + 1,\ b = 2i + 2 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 + (i + 5)x + (5i + 12) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 42 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = -2i - 3,\ b = i - 1 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 + ix + (3i + 1) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 43 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = 3i + 2,\ b = 3i - 3 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - (2i + 3)x + (i + 5) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 44 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = 3i - 2,\ b = -3i + 2 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - ix + (6i - 2) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 45 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = -i - 1,\ b = -i + 3 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 + (i + 5)x + 12 = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 46 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = i - 3,\ b = i + 2 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 + (2i - 1)x - (7i - 1) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 47 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = -3i - 1,\ b = 3i + 3 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 + (2i - 5)x - (7i - 9) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 48 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = -i - 2,\ b = -3i + 3 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - (2i - 1)x + (5i + 1) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 49 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = -2i - 1,\ b = 2i - 3 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 + (2i + 1)x - (9i + 3) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 50 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = -i + 1,\ b = 3i + 1 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - (i + 3)x + (4i + 8) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 51 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = -3i - 1,\ b = 3i + 2 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - (2i + 5)x + (7i + 9) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 52 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = 2i - 2,\ b = -2i - 2 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - ix - (10i - 2) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 53 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = -3i + 2,\ b = -3i + 3 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - (i + 2)x + (11i + 3) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 54 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = -3i - 2,\ b = -i - 1 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 + (i - 3)x + (i + 8) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 55 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = 3i + 2,\ b = -2i + 3 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 + (i - 3)x - (4i - 8) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 56 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = -3i + 3,\ b = 2i - 2 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a+b,\ a-b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 + ix - (5i - 5) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 57 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = -i - 2,\ b = i + 1 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 + (2i - 5)x - (3i - 9) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 58 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) a, b bezeichnen $a = -i+3$, $b = -3i+2 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a+b$, $a-b$, ab und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 + (2i+1)x - (5i-1) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 59 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = -2i + 1,\ b = i + 2 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - (i - 5)x - (5i - 12) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 60 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = -i - 3,\ b = i - 3 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - ix + (3i + 1) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 61 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) a, b bezeichnen $a = -3i + 1$, $b = -2i - 2 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b$, $a - b$, ab und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 + ix - (5i - 5) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 62 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = 2i + 1,\ b = -i + 3 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - ix - (3i - 1) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 63 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = -2i - 2,\ b = -3i - 3 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - (2i + 3)x + (5i + 5) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 64 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = 3i + 2,\ b = 3i - 3 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - ix + (5i + 5) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 65 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = 2i + 3,\ b = 3i - 2 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 + (i - 4)x - (5i - 5) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 66 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = i + 1,\ b = -3i - 3 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - (2i + 1)x - (5i - 1) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 67 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = 3i - 1,\ b = -3i + 3 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 + (2i + 1)x + (7i + 1) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 68 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = -2i + 3,\ b = 2i - 3 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - (i - 2)x + (5i - 1) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 69 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) a, b bezeichnen $a = -2i + 2$, $b = -3i - 3 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b$, $a - b$, ab und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - (2i + 5)x + (7i + 9) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 70 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = -i - 3,\ b = -3i - 3 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 + ix - (5i - 5) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 71 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) a, b bezeichnen $a = -3i - 3$, $b = -i + 1 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b$, $a - b$, ab und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 + (i + 2)x + (11i + 3) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 72 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = 3i + 1,\ b = -2i - 1 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - (i - 3)x + (i + 8) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 73 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = -2i - 2,\ b = -3i - 3 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - (i + 5)x + (5i + 12) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 74 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = -2i - 2,\ b = 2i + 1 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 + (2i + 1)x - (5i - 1) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 75 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = -i + 3,\ b = 2i + 2 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - (i - 4)x - (7i - 9) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 76 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = -2i + 1,\ b = i + 2 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - (i + 4)x + (7i + 9) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 77 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = 3i + 1,\ b = -3i - 1 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 + (2i + 3)x + (5i + 5) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 78 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = -2i - 2,\ b = -i - 2 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - (2i - 1)x - (11i + 3) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 79 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) a, b bezeichnen $a = -2i - 3$, $b = -2i - 2 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b$, $a - b$, ab und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - ix - (5i - 5) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 80 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) a, b bezeichnen $a = -3i + 1$, $b = -i - 2 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b$, $a - b$, ab und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - (i - 5)x - (5i - 12) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 81 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = 3i - 1,\ b = -3i - 3 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 + ix + (5i + 5) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 82 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = 3i + 2,\ b = i + 2 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - (2i + 5)x + (7i + 9) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 83 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = 2i + 1,\ b = 2i + 3 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 + (i + 5)x + (i + 8) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 84 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = i - 3,\ b = i - 1 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 + (i - 5)x + 12 = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 85 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = i + 2,\ b = -3i + 2 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - (i - 4)x - (5i - 5) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 86 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = -3i + 2,\ b = 2i - 1 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 + ix - (9i + 7) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 87 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = i + 1,\ b = -2i - 1 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 + ix + (5i + 5) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 88 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) a, b bezeichnen $a = -i+3$, $b = -3i+2 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a+b$, $a-b$, ab und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 + (2i+3)x + (i+5) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 89 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = -i + 3,\ b = -i + 1 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - (i + 1)x + (8i - 4) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 90 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) a, b bezeichnen $a = -i+1$, $b = -3i-1 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a+b$, $a-b$, ab und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - (i+2)x + (7i-1) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 91 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = 2i - 3,\ b = 2i + 1 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - (i + 2)x - (5i + 1) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 92 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = -i - 1,\ b = 3i + 1 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - ix + (5i + 5) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 93 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = -3i + 1,\ b = 2i - 1 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - (i - 3)x - (3i - 4) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 94 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = -2i + 1,\ b = 3i + 2 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - (i + 5)x + 12 = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 95 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = -i - 3,\ b = -i + 2 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - (i + 1)x - (7i + 4) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 96 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = 2i - 3,\ b = -3i + 1 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 + ix - (15i + 3) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 97 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = i - 2,\ b = -2i - 1 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 + (2i + 5)x + (7i + 9) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 98 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = 2i + 2,\ b = i - 2 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - (i + 3)x - (i - 8) = 0.$$

Name:										
Vorname:										

Matrikel-Nr.:						

Aufgabe 3

Exemplar 99 B

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = -i + 2,\ b = 2i - 3 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - ix + (6i - 2) = 0.$$

Lösungen zur Aufgabe 3

erzeugt mit der Online-Fassung „Lineare Algebra individuell“ Ver. 0.61,
M. Roczen und H. Wolter unter Mitarbeit von W. Pohl, D. Popescu, R. Laza

---

Aufgabe 3 Exemplar 1B

Lösung.

(1) Es ist $a+b=-3,\ a-b=6i-1$ und $ab=3i+11$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}}=\frac{(3i-2)\cdot(3i-1)}{(-3i-1)\cdot(3i-1)}=\frac{-9i-7}{10}=-(\frac{9}{10}i+\frac{7}{10}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x-(\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}))^2=(\frac{15}{2}i-4)$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*)\qquad 4\cdot(x-(\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}))^2=30i-16.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $30i-16$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2=u^2-v^2+2uvi,$ daher

$$(u+vi)^2=30i-16$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*}\qquad\begin{cases}u^2-v^2=-16\\ 2uv=30.\end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u,v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z=u+vi=\pm(5i+3).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x-(\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}))=\pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1=-2i-1$ und $x_2=3i+2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 2B

Lösung.

(1) Es ist $a+b=1,\ a-b=-6i+3$ und $ab=9i+7$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}}=\frac{(-3i+2)\cdot(-3i-1)}{(3i-1)\cdot(-3i-1)}=\frac{-3i-11}{10}=-(\frac{3}{10}i+\frac{11}{10}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x+(\frac{1}{2}i-\frac{3}{2}))^2=(\frac{3}{2}i-2)$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*)\quad 4\cdot(x+(\frac{1}{2}i-\frac{3}{2}))^2=6i-8.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $6i-8$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2=u^2-v^2+2uvi$, daher

$$(u+vi)^2=6i-8$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*}\quad\begin{cases}u^2-v^2=-8\\ 2uv=6.\end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u,v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z=u+vi=\pm(3i+1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x+(\frac{1}{2}i-\frac{3}{2}))=\pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1=-2i+1$ und $x_2=i+2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 3B

Lösung.

(1) Es ist $a+b=2$, $a-b=-6i+4$ und $ab=12i+6$.
Den Quotienten $\dfrac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}}=\frac{(-3i+3)\cdot(-3i-1)}{(3i-1)\cdot(-3i-1)}=\frac{-6i-12}{10}=-(\frac{3}{5}i+\frac{6}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x-(\frac{1}{2}i+1))^2=-(6i-\frac{7}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*)\quad 4\cdot(x-(\frac{1}{2}i+1))^2=-24i+7.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-24i+7$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2=u^2-v^2+2uvi$, daher

$$(u+vi)^2=-24i+7$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = 7 \\ 2uv = -24. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i - 4).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2{\cdot}(x - (\frac{1}{2}i + 1)) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i + 3$ und $x_2 = 2i - 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 4B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -i - 2$, $a - b = -5i$ und $ab = i + 7$.
Den Quotienten $\dfrac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a{\cdot}\overline{b}}{b{\cdot}\overline{b}} = \frac{(-3i-1){\cdot}(-2i-1)}{(2i-1){\cdot}(-2i-1)} = \frac{5i-5}{5} = (i-1).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + (i - \frac{1}{2}))^2 = (6i - \frac{7}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4{\cdot}(x + (i - \frac{1}{2}))^2 = 24i - 7.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $24i-7$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = 24i - 7$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -7 \\ 2uv = 24. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(4i + 3).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2{\cdot}(x + (i - \frac{1}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i - 1$ und $x_2 = i + 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 5B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -i - 1$, $a - b = -3i - 3$ und $ab = -4i$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(-2i-2)\cdot(-i+1)}{(i+1)\cdot(-i+1)} = \frac{-4}{2} = -2.$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (i - \frac{5}{2}))^2 = -(2i + \frac{15}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4\cdot(x - (i - \frac{5}{2}))^2 = -8i - 15.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-8i - 15$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -8i - 15$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -15 \\ 2uv = -8. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(4i - 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (i - \frac{5}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i - 2$ und $x_2 = 3i - 3$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 6B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -5i$, $a - b = -i - 2$ und $ab = -i - 7$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(-3i-1)\cdot(2i+1)}{(-2i+1)\cdot(2i+1)} = \frac{-5i+5}{5} = -(i-1).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x-(i-\frac{1}{2}))^2=(6i-\frac{7}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*)\quad 4\cdot(x-(i-\frac{1}{2}))^2=24i-7.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $24i-7$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2=u^2-v^2+2uvi,$ daher

$$(u+vi)^2=24i-7$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*}\quad\begin{cases}u^2-v^2=-7\\ 2uv=24.\end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u,v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z=u+vi=\pm(4i+3).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x-(i-\frac{1}{2}))=\pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1=-i-2$ und $x_2=3i+1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 7B

Lösung.

(1) Es ist $a+b=-1,\ a-b=-6i+5$ und $ab=15i+3.$

Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}}=\frac{(-3i+2)\cdot(-3i-3)}{(3i-3)\cdot(-3i-3)}=\frac{3i-15}{18}=(\frac{1}{6}i-\frac{5}{6}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x+(\frac{1}{2}i+2))^2=-(3i+\frac{5}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*)\quad 4\cdot(x+(\frac{1}{2}i+2))^2=-12i-5.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-12i-5$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2=u^2-v^2+2uvi,$ daher

$$(u+vi)^2=-12i-5$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -5 \\ 2uv = -12. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i - 2).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2{\cdot}(x + (\frac{1}{2}i + 2)) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i - 1$ und $x_2 = i - 3$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 8B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 4i + 6$, $a - b = -2i$ und $ab = 12i + 6$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a{\cdot}\overline{b}}{b{\cdot}\overline{b}} = \frac{(i+3){\cdot}(-3i+3)}{(3i+3){\cdot}(-3i+3)} = \frac{-6i+12}{18} = -(\frac{1}{3}i - \frac{2}{3}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (i + \frac{5}{2}))^2 = -(2i + \frac{15}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4{\cdot}(x - (i + \frac{5}{2}))^2 = -8i - 15.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-8i - 15$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -8i - 15$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -15 \\ 2uv = -8. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(4i - 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2{\cdot}(x - (i + \frac{5}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i + 3$ und $x_2 = 3i + 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 9B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 6$, $a - b = 6i$ und $ab = 18$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(3i+3)\cdot(3i+3)}{(-3i+3)\cdot(3i+3)} = \frac{18i}{18} = i.$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (\frac{1}{2}i + \frac{3}{2}))^2 = (\frac{5}{2}i - 6)$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4\cdot(x - (\frac{1}{2}i + \frac{3}{2}))^2 = 10i - 24.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $10i - 24$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = 10i - 24$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -24 \\ 2uv = 10. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i + 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (\frac{1}{2}i + \frac{3}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i + 1$ und $x_2 = 3i + 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 10B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -i + 1$, $a - b = 3i - 5$ und $ab = 7i - 4$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(i-2)\cdot(2i+3)}{(-2i+3)\cdot(2i+3)} = \frac{-i-8}{13} = -(\frac{1}{13}i + \frac{8}{13}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x+\frac{1}{2}i)^2 = -(10i+\frac{9}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4\cdot(x+\frac{1}{2}i)^2 = -40i-9.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-40i-9$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2 = u^2-v^2+2uvi,$ daher

$$(u+vi)^2 = -40i-9$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2-v^2=-9 \\ 2uv=-40. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u,v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u+vi = \pm(5i-4).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x+\frac{1}{2}i) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1=-3i+2$ und $x_2=2i-2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 11B

Lösung.

(1) Es ist $a+b=3i+2,\ a-b=-i+4$ und $ab=5i-5.$

Den Quotienten $\dfrac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(i+3)\cdot(-2i-1)}{(2i-1)\cdot(-2i-1)} = \frac{-7i-1}{5} = -(\frac{7}{5}i+\frac{1}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x-\frac{1}{2}i)^2 = -(6i-\frac{7}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4\cdot(x-\frac{1}{2}i)^2 = -24i+7.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-24i+7$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2 = u^2-v^2+2uvi,$ daher

$$(u+vi)^2 = -24i+7$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = 7 \\ 2uv = -24. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i - 4).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2{\cdot}(x - \frac{1}{2}i) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i + 2$ und $x_2 = 2i - 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 12B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 4i + 2$, $a - b = -2i$ und $ab = 4i - 2$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a{\cdot}\overline{b}}{b{\cdot}\overline{b}} = \frac{(i+1){\cdot}(-3i+1)}{(3i+1){\cdot}(-3i+1)} = \frac{-2i+4}{10} = -(\frac{1}{5}i - \frac{2}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (i - \frac{1}{2}))^2 = (10i + \frac{9}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4{\cdot}(x - (i - \frac{1}{2}))^2 = 40i + 9.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $40i+9$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = 40i + 9$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = 9 \\ 2uv = 40. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(4i + 5).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2{\cdot}(x - (i - \frac{1}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i - 3$ und $x_2 = 3i + 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 13B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = i,\ a - b = 3i + 2$ und $ab = -3i + 1$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(2i+1)\cdot(i-1)}{(-i-1)\cdot(i-1)} = \frac{-i-3}{2} = -(\frac{1}{2}i + \frac{3}{2}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + (\frac{1}{2}i - \frac{5}{2}))^2 = -(\frac{5}{2}i + 6)$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4\cdot(x + (\frac{1}{2}i - \frac{5}{2}))^2 = -10i - 24.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-10i - 24$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -10i - 24$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -24 \\ 2uv = -10. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i - 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + (\frac{1}{2}i - \frac{5}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i + 3$ und $x_2 = 2i + 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 14B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 6i + 1,\ a - b = 5$ und $ab = 3i - 15$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(3i+3)\cdot(-3i-2)}{(3i-2)\cdot(-3i-2)} = \frac{-15i+3}{13} = -(\frac{15}{13}i - \frac{3}{13}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + (i - \frac{1}{2}))^2 = (6i - \frac{7}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4\cdot(x + (i - \frac{1}{2}))^2 = 24i - 7.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $24i-7$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi,$ daher

$$(u + vi)^2 = 24i - 7$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -7 \\ 2uv = 24. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(4i + 3).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + (i - \frac{1}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i - 1$ und $x_2 = i + 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 15B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -2,\ a - b = -4i - 4$ und $ab = -8i + 1.$
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(-2i - 3)\cdot(-2i + 1)}{(2i + 1)\cdot(-2i + 1)} = \frac{4i - 7}{5} = (\frac{4}{5}i - \frac{7}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (\frac{1}{2}i - 1))^2 = -(10i + \frac{9}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4\cdot(x - (\frac{1}{2}i - 1))^2 = -40i - 9.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-40i - 9$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi,$ daher

$$(u + vi)^2 = -40i - 9$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -9 \\ 2uv = -40. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i - 4).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2{\cdot}(x - (\frac{1}{2}i - 1)) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i + 1$ und $x_2 = 3i - 3$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 16B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 2i + 1$, $a - b = -4i - 5$ und $ab = -9i - 3$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a{\cdot}\overline{b}}{b{\cdot}\overline{b}} = \frac{(-i-2){\cdot}(-3i+3)}{(3i+3){\cdot}(-3i+3)} = \frac{3i-9}{18} = (\frac{1}{6}i - \frac{1}{2}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (\frac{1}{2}i + 1))^2 = (6i + \frac{7}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4{\cdot}(x - (\frac{1}{2}i + 1))^2 = 24i + 7.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $24i+7$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = 24i + 7$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = 7 \\ 2uv = 24. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i + 4).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2{\cdot}(x - (\frac{1}{2}i + 1)) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i - 1$ und $x_2 = 2i + 3$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 17B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -4i - 3$, $a - b = 1$ und $ab = 6i - 2$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(-2i-1)\cdot(2i-2)}{(-2i-2)\cdot(2i-2)} = \frac{2i+6}{8} = (\frac{1}{4}i + \frac{3}{4}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (\frac{1}{2}i - 1))^2 = (6i + \frac{7}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4 \cdot (x - (\frac{1}{2}i - 1))^2 = 24i + 7.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $24i+7$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = 24i + 7$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = 7 \\ 2uv = 24. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i + 4).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2 \cdot (x - (\frac{1}{2}i - 1)) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i - 3$ und $x_2 = 2i + 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 18B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 4i + 2$, $a - b = 2i - 4$ und $ab = 8i - 6$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(3i-1)\cdot(-i+3)}{(i+3)\cdot(-i+3)} = \frac{10i}{10} = i.$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x+\frac{1}{2}i)^2 = (6i+\frac{7}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4\cdot(x+\frac{1}{2}i)^2 = 24i+7.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $24i+7$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2 = u^2-v^2+2uvi,$ daher

$$(u+vi)^2 = 24i+7$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2-v^2=7 \\ 2uv=24. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u,v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u+vi = \pm(3i+4).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x+\frac{1}{2}i) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1=-2i-2$ und $x_2=i+2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 19B

Lösung.

(1) Es ist $a+b=-2i+5,\ a-b=-1$ und $ab=-5i+5.$

Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(-i+2)\cdot(i+3)}{(-i+3)\cdot(i+3)} = \frac{-i+7}{10} = -(\frac{1}{10}i-\frac{7}{10}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x+(i-\frac{5}{2}))^2 = -(2i+\frac{15}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4\cdot(x+(i-\frac{5}{2}))^2 = -8i-15.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-8i-15$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2 = u^2-v^2+2uvi,$ daher

$$(u+vi)^2 = -8i-15$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -15 \\ 2uv = -8. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(4i - 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2{\cdot}(x + (i - \frac{5}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i + 3$ und $x_2 = i + 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 20B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 2i + 4$, $a - b = -4i - 2$ und $ab = 6$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a{\cdot}\overline{b}}{b{\cdot}\overline{b}} = \frac{(-i+1){\cdot}(-3i+3)}{(3i+3){\cdot}(-3i+3)} = \frac{-6i}{18} = -\frac{1}{3}i.$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + \frac{1}{2}i)^2 = -(5i + \frac{21}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4{\cdot}(x + \frac{1}{2}i)^2 = -20i - 21.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-20i - 21$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -20i - 21$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -21 \\ 2uv = -20. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i - 2).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2{\cdot}(x + \frac{1}{2}i) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i + 1$ und $x_2 = 2i - 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 21B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -3i + 1$, $a - b = i + 3$ und $ab = -3i - 4$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(-i+2)\cdot(2i-1)}{(-2i-1)\cdot(2i-1)} = \frac{5i}{5} = i.$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (\frac{1}{2}i + 2))^2 = -(5i + \frac{21}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4\cdot(x - (\frac{1}{2}i + 2))^2 = -20i - 21.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-20i - 21$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -20i - 21$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -21 \\ 2uv = -20. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i - 2).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (\frac{1}{2}i + 2)) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i + 3$ und $x_2 = 3i + 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 22B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -i - 4$, $a - b = -5i$ und $ab = 2i + 10$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(-3i-2)\cdot(-2i-2)}{(2i-2)\cdot(-2i-2)} = \frac{10i-2}{8} = (\frac{5}{4}i - \frac{1}{4}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x+(\frac{1}{2}i+\frac{3}{2}))^2=-(\frac{3}{2}i+2)$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*)\quad 4\cdot(x+(\frac{1}{2}i+\frac{3}{2}))^2=-6i-8.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-6i-8$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2=u^2-v^2+2uvi,$ daher

$$(u+vi)^2=-6i-8$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*}\quad\begin{cases}u^2-v^2=-8\\ 2uv=-6.\end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u,v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z=u+vi=\pm(3i-1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x+(\frac{1}{2}i+\frac{3}{2}))=\pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1=-2i-1$ und $x_2=i-2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 23B

Lösung.

(1) Es ist $a+b=-i-1,\ a-b=5i+3$ und $ab=-7i+4.$

Den Quotienten $\dfrac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}}=\frac{(2i+1)\cdot(3i-2)}{(-3i-2)\cdot(3i-2)}=\frac{-i-8}{13}=-(\frac{1}{13}i+\frac{8}{13}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x-(i-\frac{1}{2}))^2=(10i+\frac{9}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*)\quad 4\cdot(x-(i-\frac{1}{2}))^2=40i+9.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $40i+9$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2=u^2-v^2+2uvi,$ daher

$$(u+vi)^2=40i+9$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = 9 \\ 2uv = 40. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(4i + 5).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2{\cdot}(x - (i - \frac{1}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i - 3$ und $x_2 = 3i + 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 24B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 4$, $a - b = 4i + 2$ und $ab = -4i + 7$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a{\cdot}\overline{b}}{b{\cdot}\overline{b}} = \frac{(2i+3){\cdot}(2i+1)}{(-2i+1){\cdot}(2i+1)} = \frac{8i-1}{5} = (\frac{8}{5}i - \frac{1}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (i + \frac{1}{2}))^2 = -(6i + \frac{7}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4{\cdot}(x - (i + \frac{1}{2}))^2 = -24i - 7.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-24i - 7$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -24i - 7$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -7 \\ 2uv = -24. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(4i - 3).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2{\cdot}(x - (i + \frac{1}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i + 2$ und $x_2 = 3i - 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 25B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -i + 3$, $a - b = 5i + 1$ und $ab = -4i + 8$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(2i+2)\cdot(3i+1)}{(-3i+1)\cdot(3i+1)} = \frac{8i-4}{10} = (\frac{4}{5}i - \frac{2}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + (\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}))^2 = -(\frac{15}{2}i - 4)$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4\cdot(x + (\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}))^2 = -30i + 16.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-30i + 16$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -30i + 16$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = 16 \\ 2uv = -30. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i - 5).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + (\frac{1}{2}i - \frac{1}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i + 3$ und $x_2 = i - 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 26B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -i - 5$, $a - b = -3i - 1$ und $ab = i + 8$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(-2i-3)\cdot(-i-2)}{(i-2)\cdot(-i-2)} = \frac{7i+4}{5} = (\frac{7}{5}i + \frac{4}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x-(\frac{1}{2}i-2))^2=-(3i+\frac{5}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*)\quad 4\cdot(x-(\frac{1}{2}i-2))^2=-12i-5.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-12i-5$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2=u^2-v^2+2uvi,$ daher

$$(u+vi)^2=-12i-5$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*}\quad\begin{cases}u^2-v^2=-5\\ 2uv=-12.\end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u,v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z=u+vi=\pm(3i-2).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x-(\frac{1}{2}i-2))=\pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1=-i-1$ und $x_2=2i-3$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 27B

Lösung.

(1) Es ist $a+b=i,\ a-b=5i-2$ und $ab=5i+5.$
Den Quotienten $\dfrac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}}=\frac{(3i-1)\cdot(2i+1)}{(-2i+1)\cdot(2i+1)}=\frac{i-7}{5}=(\frac{1}{5}i-\frac{7}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x+(\frac{1}{2}i+2))^2=(3i-\frac{5}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*)\quad 4\cdot(x+(\frac{1}{2}i+2))^2=12i-5.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $12i-5$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2=u^2-v^2+2uvi,$ daher

$$(u+vi)^2=12i-5$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -5 \\ 2uv = 12. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i + 2).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2{\cdot}(x + (\frac{1}{2}i + 2)) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i - 3$ und $x_2 = i - 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 28B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = i - 5$, $a - b = -5i + 1$ und $ab = 12$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a{\cdot}\overline{b}}{b{\cdot}\overline{b}} = \frac{(-2i-2){\cdot}(-3i-3)}{(3i-3){\cdot}(-3i-3)} = \frac{12i}{18} = \frac{2}{3}i.$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (i + \frac{3}{2}))^2 = (2i - \frac{15}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4{\cdot}(x - (i + \frac{3}{2}))^2 = 8i - 15.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $8i-15$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = 8i - 15$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -15 \\ 2uv = 8. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(4i + 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2{\cdot}(x - (i + \frac{3}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i + 1$ und $x_2 = 3i + 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 29B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = i - 2$, $a - b = 3i - 4$ und $ab = 5i - 1$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(2i-3)\cdot(i+1)}{(-i+1)\cdot(i+1)} = \frac{-i-5}{2} = -(\frac{1}{2}i + \frac{5}{2}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (\frac{1}{2}i - \frac{3}{2}))^2 = (\frac{5}{2}i - 6)$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4\cdot(x - (\frac{1}{2}i - \frac{3}{2}))^2 = 10i - 24.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $10i - 24$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = 10i - 24$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -24 \\ 2uv = 10. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i + 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (\frac{1}{2}i - \frac{3}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i - 2$ und $x_2 = 3i - 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 30B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -5i + 2$, $a - b = -i$ und $ab = -5i - 5$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(-3i+1)\cdot(2i+1)}{(-2i+1)\cdot(2i+1)} = \frac{-i+7}{5} = -(\frac{1}{5}i - \frac{7}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x-(\frac{1}{2}i+\frac{5}{2}))^2=-(\frac{5}{2}i+6)$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*)\quad 4\cdot(x-(\frac{1}{2}i+\frac{5}{2}))^2=-10i-24.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-10i-24$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2=u^2-v^2+2uvi,$ daher

$$(u+vi)^2=-10i-24$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*}\quad\begin{cases}u^2-v^2=-24\\ 2uv=-10.\end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u,v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z=u+vi=\pm(5i-1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x-(\frac{1}{2}i+\frac{5}{2}))=\pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1=-2i+3$ und $x_2=3i+2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 31B

Lösung.

(1) Es ist $a+b=-4i+6,\ a-b=2i$ und $ab=-12i+6.$

Den Quotienten $\dfrac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}}=\frac{(-i+3)\cdot(3i+3)}{(-3i+3)\cdot(3i+3)}=\frac{6i+12}{18}=(\frac{1}{3}i+\frac{2}{3}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x+(\frac{1}{2}i-2))^2=-(5i+\frac{21}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*)\quad 4\cdot(x+(\frac{1}{2}i-2))^2=-20i-21.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-20i-21$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2=u^2-v^2+2uvi,$ daher

$$(u+vi)^2=-20i-21$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -21 \\ 2uv = -20. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i - 2).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2{\cdot}(x + (\frac{1}{2}i - 2)) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i + 3$ und $x_2 = 2i + 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 32B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 4i - 1$, $a - b = 3$ und $ab = -2i - 6$.
Den Quotienten $\dfrac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a{\cdot}\overline{b}}{b{\cdot}\overline{b}} = \frac{(2i+1){\cdot}(-2i-2)}{(2i-2){\cdot}(-2i-2)} = \frac{-6i+2}{8} = -(\frac{3}{4}i - \frac{1}{4}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (i - \frac{1}{2}))^2 = -(6i + \frac{7}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4{\cdot}(x - (i - \frac{1}{2}))^2 = -24i - 7.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-24i - 7$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -24i - 7$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -7 \\ 2uv = -24. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(4i - 3).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2{\cdot}(x - (i - \frac{1}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i + 1$ und $x_2 = 3i - 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 33B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -6i - 1$, $a - b = -3$ und $ab = 3i - 11$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(-3i-2)\cdot(3i+1)}{(-3i+1)\cdot(3i+1)} = \frac{-9i+7}{10} = -(\frac{9}{10}i - \frac{7}{10}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + (\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}))^2 = -(\frac{15}{2}i + 4)$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4\cdot(x + (\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}))^2 = -30i - 16.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-30i - 16$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -30i - 16$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -16 \\ 2uv = -30. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i - 3).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + (\frac{1}{2}i - \frac{1}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i + 2$ und $x_2 = 2i - 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 34B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -5i + 1$, $a - b = -i - 5$ und $ab = -5i - 12$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(-3i-2)\cdot(2i+3)}{(-2i+3)\cdot(2i+3)} = \frac{-13i}{13} = -i.$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x-(\frac{1}{2}i+1))^2=-(10i+\frac{9}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*)\quad 4\cdot(x-(\frac{1}{2}i+1))^2=-40i-9.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-40i-9$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2=u^2-v^2+2uvi,$ daher

$$(u+vi)^2=-40i-9$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*}\quad\begin{cases}u^2-v^2=-9\\ 2uv=-40.\end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u,v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z=u+vi=\pm(5i-4).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x-(\frac{1}{2}i+1))=\pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1=-2i+3$ und $x_2=3i-1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 35B

Lösung.

(1) Es ist $a+b=-3,\ a-b=-6i+1$ und $ab=3i+11.$

Den Quotienten $\dfrac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}}=\frac{(-3i-1)\cdot(-3i-2)}{(3i-2)\cdot(-3i-2)}=\frac{9i-7}{13}=(\frac{9}{13}i-\frac{7}{13}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x-(\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}))^2=(\frac{15}{2}i+4)$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*)\quad 4\cdot(x-(\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}))^2=30i+16.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $30i+16$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2=u^2-v^2+2uvi,$ daher

$$(u+vi)^2=30i+16$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = 16 \\ 2uv = 30. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i + 5).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2{\cdot}(x - (\frac{1}{2}i + \frac{1}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i - 2$ und $x_2 = 2i + 3$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 36B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 0$, $a - b = 2i - 6$ und $ab = 6i - 8$.
Den Quotienten $\dfrac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a{\cdot}\overline{b}}{b{\cdot}\overline{b}} = \frac{(i-3){\cdot}(i+3)}{(-i+3){\cdot}(i+3)} = \frac{-10}{10} = -1.$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}))^2 = -(\frac{15}{2}i + 4)$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4{\cdot}(x - (\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}))^2 = -30i - 16.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-30i - 16$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -30i - 16$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -16 \\ 2uv = -30. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i - 3).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2{\cdot}(x - (\frac{1}{2}i - \frac{1}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i + 1$ und $x_2 = 3i - 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 37B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 4i - 1$, $a - b = 2i - 5$ und $ab = 3i - 9$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(3i-3)\cdot(-i+2)}{(i+2)\cdot(-i+2)} = \frac{9i-3}{5} = (\frac{9}{5}i - \frac{3}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - \frac{1}{2}i)^2 = -(3i + \frac{5}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4\cdot(x - \frac{1}{2}i)^2 = -12i - 5.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-12i - 5$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -12i - 5$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -5 \\ 2uv = -12. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i - 2).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - \frac{1}{2}i) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i + 1$ und $x_2 = 2i - 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 38B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -4i + 3$, $a - b = -2i + 1$ und $ab = -5i - 1$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(-3i+2)\cdot(i+1)}{(-i+1)\cdot(i+1)} = \frac{-i+5}{2} = -(\frac{1}{2}i - \frac{5}{2}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x-(\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}))^2=(\frac{15}{2}i-4)$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*)\quad 4\cdot(x-(\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}))^2=30i-16.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $30i-16$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2=u^2-v^2+2uvi,$ daher

$$(u+vi)^2=30i-16$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*}\quad\begin{cases}u^2-v^2=-16\\ 2uv=30.\end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u,v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z=u+vi=\pm(5i+3).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x-(\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}))=\pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1=-2i-2$ und $x_2=3i+1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 39B

Lösung.

(1) Es ist $a+b=4i+3,\ a-b=2i-1$ und $ab=7i-1.$

Den Quotienten $\dfrac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}}=\frac{(3i+1)\cdot(-i+2)}{(i+2)\cdot(-i+2)}=\frac{5i+5}{5}=(i+1).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x-(i-\frac{1}{2}))^2=-(6i+\frac{7}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*)\quad 4\cdot(x-(i-\frac{1}{2}))^2=-24i-7.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-24i-7$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2=u^2-v^2+2uvi,$ daher

$$(u+vi)^2=-24i-7$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -7 \\ 2uv = -24. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(4i - 3).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2{\cdot}(x - (i - \frac{1}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i + 1$ und $x_2 = 3i - 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 40B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -2i + 6$, $a - b = -4i$ und $ab = -6i + 12$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a{\cdot}\overline{b}}{b{\cdot}\overline{b}} = \frac{(-3i+3){\cdot}(-i+3)}{(i+3){\cdot}(-i+3)} = \frac{-12i+6}{10} = -(\frac{6}{5}i - \frac{3}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + (\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}))^2 = (\frac{15}{2}i - 4)$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4{\cdot}(x + (\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}))^2 = 30i - 16.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $30i - 16$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = 30i - 16$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -16 \\ 2uv = 30. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i + 3).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2{\cdot}(x + (\frac{1}{2}i + \frac{1}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i - 2$ und $x_2 = 2i + 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 41B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 4i + 3$, $a - b = -1$ und $ab = 6i - 2$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(2i+1)\cdot(-2i+2)}{(2i+2)\cdot(-2i+2)} = \frac{2i+6}{8} = (\frac{1}{4}i + \frac{3}{4}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + (\frac{1}{2}i + \frac{5}{2}))^2 = -(\frac{5}{2}i + 6)$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4\cdot(x + (\frac{1}{2}i + \frac{5}{2}))^2 = -10i - 24.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-10i - 24$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -10i - 24$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -24 \\ 2uv = -10. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i - 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + (\frac{1}{2}i + \frac{5}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i - 2$ und $x_2 = 2i - 3$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 42B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -i - 4$, $a - b = -3i - 2$ und $ab = -i + 5$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(-2i-3)\cdot(-i-1)}{(i-1)\cdot(-i-1)} = \frac{5i+1}{2} = (\frac{5}{2}i + \frac{1}{2}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x+\frac{1}{2}i)^2 = -(3i+\frac{5}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4\cdot(x+\frac{1}{2}i)^2 = -12i-5.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-12i-5$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2 = u^2-v^2+2uvi,$ daher

$$(u+vi)^2 = -12i-5$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2-v^2=-5 \\ 2uv=-12. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u,v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u+vi = \pm(3i-2).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x+\frac{1}{2}i) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1=-2i+1$ und $x_2=i-1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 43B

Lösung.

(1) Es ist $a+b=6i-1,\ a-b=5$ und $ab=-3i-15.$

Den Quotienten $\dfrac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(3i+2)\cdot(-3i-3)}{(3i-3)\cdot(-3i-3)} = \frac{-15i+3}{18} = -(\frac{5}{6}i-\frac{1}{6}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x-(i+\frac{3}{2}))^2 = (2i-\frac{15}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4\cdot(x-(i+\frac{3}{2}))^2 = 8i-15.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $8i-15$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2 = u^2-v^2+2uvi,$ daher

$$(u+vi)^2 = 8i-15$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -15 \\ 2uv = 8. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(4i + 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2{\cdot}(x - (i + \frac{3}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i + 1$ und $x_2 = 3i + 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 44B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 0$, $a - b = 6i - 4$ und $ab = 12i + 5$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a{\cdot}\overline{b}}{b{\cdot}\overline{b}} = \frac{(3i-2){\cdot}(3i+2)}{(-3i+2){\cdot}(3i+2)} = \frac{-13}{13} = -1.$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - \frac{1}{2}i)^2 = -(6i - \frac{7}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4{\cdot}(x - \frac{1}{2}i)^2 = -24i + 7.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-24i + 7$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -24i + 7$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = 7 \\ 2uv = -24. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i - 4).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2{\cdot}(x - \frac{1}{2}i) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i + 2$ und $x_2 = 2i - 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 45B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -2i + 2$, $a - b = -4$ und $ab = -2i - 4$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(-i-1)\cdot(i+3)}{(-i+3)\cdot(i+3)} = \frac{-4i-2}{10} = -(\frac{2}{5}i + \frac{1}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + (\frac{1}{2}i + \frac{5}{2}))^2 = (\frac{5}{2}i - 6)$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4\cdot(x + (\frac{1}{2}i + \frac{5}{2}))^2 = 10i - 24.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $10i - 24$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = 10i - 24$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -24 \\ 2uv = 10. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i + 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + (\frac{1}{2}i + \frac{5}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i - 3$ und $x_2 = 2i - 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 46B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 2i - 1$, $a - b = -5$ und $ab = -i - 7$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(i-3)\cdot(-i+2)}{(i+2)\cdot(-i+2)} = \frac{5i-5}{5} = (i-1).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + (i - \frac{1}{2}))^2 = (6i - \frac{7}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4\cdot(x + (i - \frac{1}{2}))^2 = 24i - 7.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $24i-7$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi,$ daher

$$(u + vi)^2 = 24i - 7$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -7 \\ 2uv = 24. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(4i + 3).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + (i - \frac{1}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i - 1$ und $x_2 = i + 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 47B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 2,$ $a - b = -6i - 4$ und $ab = -12i + 6.$

Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(-3i - 1)\cdot(-3i + 3)}{(3i + 3)\cdot(-3i + 3)} = \frac{-6i - 12}{18} = -(\frac{1}{3}i + \frac{2}{3}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + (i - \frac{5}{2}))^2 = (2i - \frac{15}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4\cdot(x + (i - \frac{5}{2}))^2 = 8i - 15.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $8i-15$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi,$ daher

$$(u + vi)^2 = 8i - 15$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -15 \\ 2uv = 8. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(4i + 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2{\cdot}(x + (i - \frac{5}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i + 2$ und $x_2 = i + 3$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 48B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -4i + 1$, $a - b = 2i - 5$ und $ab = 3i - 9$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a{\cdot}\overline{b}}{b{\cdot}\overline{b}} = \frac{(-i-2){\cdot}(3i+3)}{(-3i+3){\cdot}(3i+3)} = \frac{-9i-3}{18} = -(\frac{1}{2}i + \frac{1}{6}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (i - \frac{1}{2}))^2 = -(6i + \frac{7}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4{\cdot}(x - (i - \frac{1}{2}))^2 = -24i - 7.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-24i - 7$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -24i - 7$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -7 \\ 2uv = -24. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(4i - 3).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2{\cdot}(x - (i - \frac{1}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i + 1$ und $x_2 = 3i - 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 49B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -4$, $a - b = -4i + 2$ und $ab = 4i + 7$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(-2i-1)\cdot(-2i-3)}{(2i-3)\cdot(-2i-3)} = \frac{8i-1}{13} = (\frac{8}{13}i - \frac{1}{13}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + (i + \frac{1}{2}))^2 = (10i + \frac{9}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4\cdot(x + (i + \frac{1}{2}))^2 = 40i + 9.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $40i+9$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = 40i + 9$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = 9 \\ 2uv = 40. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(4i + 5).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + (i + \frac{1}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i - 3$ und $x_2 = i + 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 50B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 2i + 2$, $a - b = -4i$ und $ab = 2i + 4$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(-i+1)\cdot(-3i+1)}{(3i+1)\cdot(-3i+1)} = \frac{-4i-2}{10} = -(\frac{2}{5}i + \frac{1}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x-(\frac{1}{2}i+\frac{3}{2}))^2=-(\frac{5}{2}i+6)$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*)\quad 4\cdot(x-(\frac{1}{2}i+\frac{3}{2}))^2=-10i-24.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-10i-24$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2=u^2-v^2+2uvi$, daher

$$(u+vi)^2=-10i-24$$

äquivalent zum System

$$(\begin{smallmatrix}**\end{smallmatrix})\quad \begin{cases} u^2-v^2=-24 \\ \quad 2uv=-10. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u,v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z=u+vi=\pm(5i-1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x-(\frac{1}{2}i+\frac{3}{2}))=\pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1=-2i+2$ und $x_2=3i+1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 51B

Lösung.

(1) Es ist $a+b=1$, $a-b=-6i-3$ und $ab=-9i+7$.
Den Quotienten $\dfrac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}}=\frac{(-3i-1)\cdot(-3i+2)}{(3i+2)\cdot(-3i+2)}=\frac{-3i-11}{13}=-(\frac{3}{13}i+\frac{11}{13}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x-(i+\frac{5}{2}))^2=-(2i+\frac{15}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*)\quad 4\cdot(x-(i+\frac{5}{2}))^2=-8i-15.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-8i-15$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2=u^2-v^2+2uvi$, daher

$$(u+vi)^2=-8i-15$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -15 \\ 2uv = -8. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(4i - 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2{\cdot}(x - (i + \frac{5}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i + 3$ und $x_2 = 3i + 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 52B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -4$, $a - b = 4i$ und $ab = 8$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a{\cdot}\overline{b}}{b{\cdot}\overline{b}} = \frac{(2i-2){\cdot}(2i-2)}{(-2i-2){\cdot}(2i-2)} = \frac{-8i}{8} = -i.$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - \frac{1}{2}i)^2 = (10i - \frac{9}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4{\cdot}(x - \frac{1}{2}i)^2 = 40i - 9.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $40i-9$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = 40i - 9$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -9 \\ 2uv = 40. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i + 4).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2{\cdot}(x - \frac{1}{2}i) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i - 2$ und $x_2 = 3i + 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 53B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -6i + 5$, $a - b = -1$ und $ab = -15i - 3$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(-3i+2)\cdot(3i+3)}{(-3i+3)\cdot(3i+3)} = \frac{-3i+15}{18} = -(\frac{1}{6}i - \frac{5}{6}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (\frac{1}{2}i + 1))^2 = -(10i + \frac{9}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4\cdot(x - (\frac{1}{2}i + 1))^2 = -40i - 9.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-40i - 9$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -40i - 9$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -9 \\ 2uv = -40. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i - 4).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (\frac{1}{2}i + 1)) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i + 3$ und $x_2 = 3i - 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 54B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -4i - 3$, $a - b = -2i - 1$ und $ab = 5i - 1$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(-3i-2)\cdot(i-1)}{(-i-1)\cdot(i-1)} = \frac{i+5}{2} = (\frac{1}{2}i + \frac{5}{2}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x+(\frac{1}{2}i-\frac{3}{2}))^2=-(\frac{5}{2}i+6)$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*)\quad 4\cdot(x+(\frac{1}{2}i-\frac{3}{2}))^2=-10i-24.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-10i-24$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2=u^2-v^2+2uvi,$ daher

$$(u+vi)^2=-10i-24$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*}\quad\begin{cases}u^2-v^2=-24\\ 2uv=-10.\end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u,v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z=u+vi=\pm(5i-1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x+(\frac{1}{2}i-\frac{3}{2}))=\pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1=-3i+2$ und $x_2=2i+1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 55B

Lösung.

(1) Es ist $a+b=i+5,\ a-b=5i-1$ und $ab=5i+12.$

Den Quotienten $\dfrac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}}=\frac{(3i+2)\cdot(2i+3)}{(-2i+3)\cdot(2i+3)}=\frac{13i}{13}=i.$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x+(\frac{1}{2}i-\frac{3}{2}))^2=(\frac{5}{2}i-6)$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*)\quad 4\cdot(x+(\frac{1}{2}i-\frac{3}{2}))^2=10i-24.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $10i-24$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2=u^2-v^2+2uvi,$ daher

$$(u+vi)^2=10i-24$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -24 \\ 2uv = 10. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i + 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2{\cdot}(x + (\frac{1}{2}i - \frac{3}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i + 1$ und $x_2 = 2i + 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 56B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -i + 1$, $a - b = -5i + 5$ und $ab = 12i$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a{\cdot}\overline{b}}{b{\cdot}\overline{b}} = \frac{(-3i + 3){\cdot}(-2i - 2)}{(2i - 2){\cdot}(-2i - 2)} = \frac{-12}{8} = -\frac{3}{2}.$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + \frac{1}{2}i)^2 = (5i - \frac{21}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4{\cdot}(x + \frac{1}{2}i)^2 = 20i - 21.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $20i - 21$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = 20i - 21$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -21 \\ 2uv = 20. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i + 2).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2{\cdot}(x + \frac{1}{2}i) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i - 1$ und $x_2 = 2i + 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 57B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -1$, $a - b = -2i - 3$ und $ab = -3i - 1$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(-i-2)\cdot(-i+1)}{(i+1)\cdot(-i+1)} = \frac{i-3}{2} = (\frac{1}{2}i - \frac{3}{2}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + (i - \frac{5}{2}))^2 = -(2i + \frac{15}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4\cdot(x + (i - \frac{5}{2}))^2 = -8i - 15.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-8i - 15$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -8i - 15$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -15 \\ 2uv = -8. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(4i - 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + (i - \frac{5}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i + 3$ und $x_2 = i + 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 58B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -4i + 5$, $a - b = 2i + 1$ und $ab = -11i + 3$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(-i+3)\cdot(3i+2)}{(-3i+2)\cdot(3i+2)} = \frac{7i+9}{13} = (\frac{7}{13}i + \frac{9}{13}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + (i + \frac{1}{2}))^2 = (6i - \frac{7}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4\cdot(x + (i + \frac{1}{2}))^2 = 24i - 7.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $24i-7$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi,$ daher

$$(u + vi)^2 = 24i - 7$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -7 \\ 2uv = 24. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(4i + 3).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + (i + \frac{1}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i - 2$ und $x_2 = i + 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 59B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -i + 3,$ $a - b = -3i - 1$ und $ab = -3i + 4.$

Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(-2i + 1)\cdot(-i + 2)}{(i + 2)\cdot(-i + 2)} = \frac{-5i}{5} = -i.$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (\frac{1}{2}i - \frac{5}{2}))^2 = (\frac{5}{2}i - 6)$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4\cdot(x - (\frac{1}{2}i - \frac{5}{2}))^2 = 10i - 24.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $10i - 24$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi,$ daher

$$(u + vi)^2 = 10i - 24$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -24 \\ 2uv = 10. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i + 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (\frac{1}{2}i - \frac{5}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i - 3$ und $x_2 = 3i - 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 60B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -6$, $a - b = -2i$ und $ab = 10$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(-i-3)\cdot(-i-3)}{(i-3)\cdot(-i-3)} = \frac{6i+8}{10} = (\frac{3}{5}i + \frac{4}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - \frac{1}{2}i)^2 = -(3i + \frac{5}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4\cdot(x - \frac{1}{2}i)^2 = -12i - 5.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-12i - 5$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -12i - 5$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -5 \\ 2uv = -12. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i - 2).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - \frac{1}{2}i) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i + 1$ und $x_2 = 2i - 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 61B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -5i - 1$, $a - b = -i + 3$ und $ab = 4i - 8$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(-3i+1)\cdot(2i-2)}{(-2i-2)\cdot(2i-2)} = \frac{8i+4}{8} = (i + \frac{1}{2}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + \frac{1}{2}i)^2 = (5i - \frac{21}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4\cdot(x + \frac{1}{2}i)^2 = 20i - 21.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $20i - 21$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = 20i - 21$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -21 \\ 2uv = 20. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i + 2).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + \frac{1}{2}i) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i - 1$ und $x_2 = 2i + 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 62B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = i + 4$, $a - b = 3i - 2$ und $ab = 5i + 5$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(2i+1)\cdot(i+3)}{(-i+3)\cdot(i+3)} = \frac{7i+1}{10} = (\frac{7}{10}i + \frac{1}{10}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x-\frac{1}{2}i)^2=(3i-\frac{5}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*)\qquad 4\cdot(x-\frac{1}{2}i)^2=12i-5.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $12i-5$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2=u^2-v^2+2uvi,$ daher

$$(u+vi)^2=12i-5$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*}\qquad\begin{cases}u^2-v^2=-5\\ \quad 2uv=12.\end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u,v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z=u+vi=\pm(3i+2).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x-\frac{1}{2}i)=\pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1=-i-1$ und $x_2=2i+1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 63B

Lösung.

(1) Es ist $a+b=-5i-5,\ a-b=i+1$ und $ab=12i.$

Den Quotienten $\dfrac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}}=\frac{(-2i-2)\cdot(3i-3)}{(-3i-3)\cdot(3i-3)}=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}.$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x-(i+\frac{3}{2}))^2=-(2i+\frac{15}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*)\qquad 4\cdot(x-(i+\frac{3}{2}))^2=-8i-15.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-8i-15$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2=u^2-v^2+2uvi,$ daher

$$(u+vi)^2=-8i-15$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -15 \\ 2uv = -8. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(4i - 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (i + \frac{3}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i + 2$ und $x_2 = 3i + 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 64B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 6i - 1$, $a - b = 5$ und $ab = -3i - 15$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(3i+2)\cdot(-3i-3)}{(3i-3)\cdot(-3i-3)} = \frac{-15i+3}{18} = -(\frac{5}{6}i - \frac{1}{6}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - \frac{1}{2}i)^2 = -(5i + \frac{21}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4\cdot(x - \frac{1}{2}i)^2 = -20i - 21.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-20i - 21$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -20i - 21$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -21 \\ 2uv = -20. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i - 2).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - \frac{1}{2}i) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i + 1$ und $x_2 = 3i - 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 65B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 5i + 1$, $a - b = -i + 5$ und $ab = 5i - 12$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(2i+3)\cdot(-3i-2)}{(3i-2)\cdot(-3i-2)} = \frac{-13i}{13} = -i.$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + (\frac{1}{2}i - 2))^2 = (3i - \frac{5}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4\cdot(x + (\frac{1}{2}i - 2))^2 = 12i - 5.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $12i-5$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = 12i - 5$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -5 \\ 2uv = 12. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i + 2).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + (\frac{1}{2}i - 2)) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i + 1$ und $x_2 = i + 3$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 66B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -2i - 2$, $a - b = 4i + 4$ und $ab = -6i$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(i+1)\cdot(3i-3)}{(-3i-3)\cdot(3i-3)} = \frac{-6}{18} = -\frac{1}{3}.$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x-(i+\frac{1}{2}))^2=(6i-\frac{7}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*)\quad 4\cdot(x-(i+\frac{1}{2}))^2=24i-7.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $24i-7$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2=u^2-v^2+2uvi,$ daher

$$(u+vi)^2=24i-7$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*}\quad\begin{cases}u^2-v^2=-7\\ 2uv=24.\end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u,v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z=u+vi=\pm(4i+3).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x-(i+\frac{1}{2}))=\pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1=-i-1$ und $x_2=3i+2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 67B

Lösung.

(1) Es ist $a+b=2,\ a-b=6i-4$ und $ab=12i+6.$

Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}}=\frac{(3i-1)\cdot(3i+3)}{(-3i+3)\cdot(3i+3)}=\frac{6i-12}{18}=(\frac{1}{3}i-\frac{2}{3}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x+(i+\frac{1}{2}))^2=-(6i+\frac{7}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*)\quad 4\cdot(x+(i+\frac{1}{2}))^2=-24i-7.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-24i-7$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2=u^2-v^2+2uvi,$ daher

$$(u+vi)^2=-24i-7$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -7 \\ 2uv = -24. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(4i - 3).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2{\cdot}(x + (i + \frac{1}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i + 1$ und $x_2 = i - 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 68B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 0$, $a - b = -4i + 6$ und $ab = 12i - 5$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a{\cdot}\overline{b}}{b{\cdot}\overline{b}} = \frac{(-2i + 3){\cdot}(-2i - 3)}{(2i - 3){\cdot}(-2i - 3)} = \frac{-13}{13} = -1.$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (\frac{1}{2}i - 1))^2 = -(6i - \frac{7}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4{\cdot}(x - (\frac{1}{2}i - 1))^2 = -24i + 7.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-24i + 7$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -24i + 7$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = 7 \\ 2uv = -24. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i - 4).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2{\cdot}(x - (\frac{1}{2}i - 1)) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i + 1$ und $x_2 = 2i - 3$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 69B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -5i - 1$, $a - b = i + 5$ und $ab = -12$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(-2i+2)\cdot(3i-3)}{(-3i-3)\cdot(3i-3)} = \frac{12i}{18} = \frac{2}{3}i.$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (i + \frac{5}{2}))^2 = -(2i + \frac{15}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4\cdot(x - (i + \frac{5}{2}))^2 = -8i - 15.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-8i - 15$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -8i - 15$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -15 \\ 2uv = -8. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(4i - 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (i + \frac{5}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i + 3$ und $x_2 = 3i + 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 70B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -4i - 6$, $a - b = 2i$ und $ab = 12i + 6$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(-i-3)\cdot(3i-3)}{(-3i-3)\cdot(3i-3)} = \frac{-6i+12}{18} = -(\frac{1}{3}i - \frac{2}{3}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x+\frac{1}{2}i)^2 = (5i - \frac{21}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4\cdot(x+\frac{1}{2}i)^2 = 20i - 21.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $20i-21$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u+vi)^2 = 20i - 21$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -21 \\ 2uv = 20. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u,v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i+2).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x+\frac{1}{2}i) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i-1$ und $x_2 = 2i+1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 71B

Lösung.

(1) Es ist $a+b = -4i-2$, $a-b = -2i-4$ und $ab = -6$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(-3i-3)\cdot(i+1)}{(-i+1)\cdot(i+1)} = \frac{-6i}{2} = -3i.$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x+(\frac{1}{2}i+1))^2 = -(10i+\frac{9}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4\cdot(x+(\frac{1}{2}i+1))^2 = -40i - 9.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-40i-9$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u+vi)^2 = -40i - 9$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -9 \\ 2uv = -40. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i - 4).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2{\cdot}(x + (\frac{1}{2}i + 1)) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i + 1$ und $x_2 = 2i - 3$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 72B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = i$, $a - b = 5i + 2$ und $ab = -5i + 5$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a{\cdot}\overline{b}}{b{\cdot}\overline{b}} = \frac{(3i+1){\cdot}(2i-1)}{(-2i-1){\cdot}(2i-1)} = \frac{-i-7}{5} = -(\frac{1}{5}i + \frac{7}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (\frac{1}{2}i - \frac{3}{2}))^2 = -(\frac{5}{2}i + 6)$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4{\cdot}(x - (\frac{1}{2}i - \frac{3}{2}))^2 = -10i - 24.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-10i - 24$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -10i - 24$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -24 \\ 2uv = -10. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i - 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2{\cdot}(x - (\frac{1}{2}i - \frac{3}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i - 1$ und $x_2 = 3i - 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 73B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -5i - 5$, $a - b = i + 1$ und $ab = 12i$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(-2i-2)\cdot(3i-3)}{(-3i-3)\cdot(3i-3)} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}.$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (\frac{1}{2}i + \frac{5}{2}))^2 = -(\frac{5}{2}i + 6)$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4\cdot(x - (\frac{1}{2}i + \frac{5}{2}))^2 = -10i - 24.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-10i - 24$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -10i - 24$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -24 \\ 2uv = -10. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i - 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (\frac{1}{2}i + \frac{5}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i + 3$ und $x_2 = 3i + 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 74B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -1$, $a - b = -4i - 3$ und $ab = -6i + 2$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(-2i-2)\cdot(-2i+1)}{(2i+1)\cdot(-2i+1)} = \frac{2i-6}{5} = (\frac{2}{5}i - \frac{6}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + (i + \frac{1}{2}))^2 = (6i - \frac{7}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4\cdot(x + (i + \frac{1}{2}))^2 = 24i - 7.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $24i-7$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi,$ daher

$$(u + vi)^2 = 24i - 7$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -7 \\ 2uv = 24. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(4i + 3).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + (i + \frac{1}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i - 2$ und $x_2 = i + 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 75B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = i + 5,$ $a - b = -3i + 1$ und $ab = 4i + 8.$

Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(-i + 3)\cdot(-2i + 2)}{(2i + 2)\cdot(-2i + 2)} = \frac{-8i + 4}{8} = -(i - \frac{1}{2}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (\frac{1}{2}i - 2))^2 = (5i - \frac{21}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4\cdot(x - (\frac{1}{2}i - 2))^2 = 20i - 21.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $20i - 21$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi,$ daher

$$(u + vi)^2 = 20i - 21$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -21 \\ 2uv = 20. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i + 2).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (\frac{1}{2}i - 2)) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i - 3$ und $x_2 = 3i - 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 76B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -i + 3$, $a - b = -3i - 1$ und $ab = -3i + 4$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(-2i+1)\cdot(-i+2)}{(i+2)\cdot(-i+2)} = \frac{-5i}{5} = -i.$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (\frac{1}{2}i + 2))^2 = -(5i + \frac{21}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4\cdot(x - (\frac{1}{2}i + 2))^2 = -20i - 21.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-20i - 21$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -20i - 21$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -21 \\ 2uv = -20. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i - 2).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (\frac{1}{2}i + 2)) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i + 3$ und $x_2 = 3i + 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 77B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 0$, $a - b = 6i + 2$ und $ab = -6i + 8$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(3i+1)\cdot(3i-1)}{(-3i-1)\cdot(3i-1)} = \frac{-10}{10} = -1.$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + (i + \frac{3}{2}))^2 = -(2i + \frac{15}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4\cdot(x + (i + \frac{3}{2}))^2 = -8i - 15.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-8i - 15$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -8i - 15$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -15 \\ 2uv = -8. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(4i - 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + (i + \frac{3}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i - 1$ und $x_2 = i - 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 78B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -3i - 4$, $a - b = -i$ und $ab = 6i + 2$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(-2i-2)\cdot(i-2)}{(-i-2)\cdot(i-2)} = \frac{2i+6}{5} = (\frac{2}{5}i + \frac{6}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x-(i-\frac{1}{2}))^2=(10i+\frac{9}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*)\quad 4\cdot(x-(i-\frac{1}{2}))^2=40i+9.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $40i+9$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2=u^2-v^2+2uvi,$ daher

$$(u+vi)^2=40i+9$$

äquivalent zum System

$$(\begin{smallmatrix}**\end{smallmatrix})\quad \begin{cases} u^2-v^2=9\\ \quad 2uv=40. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u,v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z=u+vi=\pm(4i+5).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x-(i-\frac{1}{2}))=\pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1=-i-3$ und $x_2=3i+2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 79B

Lösung.

(1) Es ist $a+b=-4i-5,\ a-b=-1$ und $ab=10i+2.$

Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}}=\frac{(-2i-3)\cdot(2i-2)}{(-2i-2)\cdot(2i-2)}=\frac{-2i+10}{8}=-(\frac{1}{4}i-\frac{5}{4}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x-\frac{1}{2}i)^2=(5i-\frac{21}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*)\quad 4\cdot(x-\frac{1}{2}i)^2=20i-21.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $20i-21$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2=u^2-v^2+2uvi,$ daher

$$(u+vi)^2=20i-21$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -21 \\ 2uv = 20. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i + 2).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - \frac{1}{2}i) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i - 1$ und $x_2 = 3i + 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 80B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -4i - 1$, $a - b = -2i + 3$ und $ab = 5i - 5$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(-3i+1)\cdot(i-2)}{(-i-2)\cdot(i-2)} = \frac{7i+1}{5} = (\frac{7}{5}i + \frac{1}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (\frac{1}{2}i - \frac{5}{2}))^2 = (\frac{5}{2}i - 6)$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4\cdot(x - (\frac{1}{2}i - \frac{5}{2}))^2 = 10i - 24.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $10i - 24$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = 10i - 24$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -24 \\ 2uv = 10. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i + 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (\frac{1}{2}i - \frac{5}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i - 3$ und $x_2 = 3i - 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 81B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -4$, $a - b = 6i + 2$ und $ab = -6i + 12$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(3i-1)\cdot(3i-3)}{(-3i-3)\cdot(3i-3)} = \frac{-12i-6}{18} = -(\frac{2}{3}i + \frac{1}{3}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + \frac{1}{2}i)^2 = -(5i + \frac{21}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4\cdot(x + \frac{1}{2}i)^2 = -20i - 21.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-20i - 21$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -20i - 21$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -21 \\ 2uv = -20. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i - 2).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + \frac{1}{2}i) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i + 1$ und $x_2 = 2i - 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 82B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 4i + 4$, $a - b = 2i$ und $ab = 8i + 1$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(3i+2)\cdot(-i+2)}{(i+2)\cdot(-i+2)} = \frac{4i+7}{5} = (\frac{4}{5}i + \frac{7}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x-(i+\frac{5}{2}))^2 = -(2i+\frac{15}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4\cdot(x-(i+\frac{5}{2}))^2 = -8i-15.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-8i-15$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2 = u^2-v^2+2uvi,$ daher

$$(u+vi)^2 = -8i-15$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2-v^2=-15 \\ 2uv=-8. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u,v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u+vi = \pm(4i-1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x-(i+\frac{5}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1=-i+3$ und $x_2=3i+2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 83B

Lösung.

(1) Es ist $a+b=4i+4,\ a-b=-2$ und $ab=8i-1$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(2i+1)\cdot(-2i+3)}{(2i+3)\cdot(-2i+3)} = \frac{4i+7}{13} = (\frac{4}{13}i+\frac{7}{13}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x+(\frac{1}{2}i+\frac{5}{2}))^2 = (\frac{3}{2}i-2)$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4\cdot(x+(\frac{1}{2}i+\frac{5}{2}))^2 = 6i-8.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $6i-8$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2 = u^2-v^2+2uvi,$ daher

$$(u+vi)^2 = 6i-8$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -8 \\ 2uv = 6. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i + 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2{\cdot}(x + (\frac{1}{2}i + \frac{5}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i - 3$ und $x_2 = i - 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 84B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 2i - 4$, $a - b = -2$ und $ab = -4i + 2$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a{\cdot}\overline{b}}{b{\cdot}\overline{b}} = \frac{(i-3){\cdot}(-i-1)}{(i-1){\cdot}(-i-1)} = \frac{2i+4}{2} = (i+2).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + (\frac{1}{2}i - \frac{5}{2}))^2 = -(\frac{5}{2}i + 6)$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4{\cdot}(x + (\frac{1}{2}i - \frac{5}{2}))^2 = -10i - 24.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-10i - 24$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -10i - 24$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -24 \\ 2uv = -10. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i - 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2{\cdot}(x + (\frac{1}{2}i - \frac{5}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i + 3$ und $x_2 = 2i + 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 85B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -2i + 4$, $a - b = 4i$ und $ab = -4i + 7$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(i+2)\cdot(3i+2)}{(-3i+2)\cdot(3i+2)} = \frac{8i+1}{13} = (\frac{8}{13}i + \frac{1}{13}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (\frac{1}{2}i - 2))^2 = (3i - \frac{5}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4\cdot(x - (\frac{1}{2}i - 2))^2 = 12i - 5.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $12i-5$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = 12i - 5$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -5 \\ 2uv = 12. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i + 2).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (\frac{1}{2}i - 2)) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i - 3$ und $x_2 = 2i - 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 86B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -i + 1$, $a - b = -5i + 3$ und $ab = 7i + 4$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(-3i+2)\cdot(-2i-1)}{(2i-1)\cdot(-2i-1)} = \frac{-i-8}{5} = -(\frac{1}{5}i + \frac{8}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x+\frac{1}{2}i)^2 = (9i+\frac{27}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4\cdot(x+\frac{1}{2}i)^2 = 36i+27.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $36i+27$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u+vi)^2 = 36i+27$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = 27 \\ 2uv = 36. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u+vi = \pm(3i+6).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x+\frac{1}{2}i) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i-3$ und $x_2 = i+3$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 87B

Lösung.

(1) Es ist $a+b = -i$, $a-b = 3i+2$ und $ab = -3i+1$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(i+1)\cdot(2i-1)}{(-2i-1)\cdot(2i-1)} = \frac{i-3}{5} = (\frac{1}{5}i - \frac{3}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x+\frac{1}{2}i)^2 = -(5i+\frac{21}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4\cdot(x+\frac{1}{2}i)^2 = -20i-21.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-20i-21$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u+vi)^2 = -20i-21$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -21 \\ 2uv = -20. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i - 2).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + \frac{1}{2}i) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i + 1$ und $x_2 = 2i - 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 88B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -4i + 5$, $a - b = 2i + 1$ und $ab = -11i + 3$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(-i+3)\cdot(3i+2)}{(-3i+2)\cdot(3i+2)} = \frac{7i+9}{13} = (\frac{7}{13}i + \frac{9}{13}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + (i + \frac{3}{2}))^2 = (2i - \frac{15}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4\cdot(x + (i + \frac{3}{2}))^2 = 8i - 15.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $8i-15$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = 8i - 15$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -15 \\ 2uv = 8. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(4i + 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + (i + \frac{3}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i - 2$ und $x_2 = i - 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 89B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -2i + 4,\ a - b = 2$ und $ab = -4i + 2$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(-i+3)\cdot(i+1)}{(-i+1)\cdot(i+1)} = \frac{2i+4}{2} = (i+2).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}))^2 = -(\frac{15}{2}i - 4)$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4\cdot(x - (\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}))^2 = -30i + 16.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-30i + 16$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -30i + 16$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = 16 \\ 2uv = -30. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i - 5).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (\frac{1}{2}i + \frac{1}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i + 3$ und $x_2 = 2i - 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 90B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -4i,\ a - b = 2i + 2$ und $ab = -2i - 4$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(-i+1)\cdot(3i-1)}{(-3i-1)\cdot(3i-1)} = \frac{4i+2}{10} = (\frac{2}{5}i + \frac{1}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x-(\frac{1}{2}i+1))^2=-(6i-\frac{7}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*)\quad 4\cdot(x-(\frac{1}{2}i+1))^2=-24i+7.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-24i+7$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2=u^2-v^2+2uvi,$ daher

$$(u+vi)^2=-24i+7$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*}\quad\begin{cases}u^2-v^2=7\\ \quad 2uv=-24.\end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u,v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z=u+vi=\pm(3i-4).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x-(\frac{1}{2}i+1))=\pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1=-i+3$ und $x_2=2i-1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 91B

Lösung.

(1) Es ist $a+b=4i-2,\ a-b=-4$ und $ab=-4i-7.$

Den Quotienten $\dfrac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}}=\frac{(2i-3)\cdot(-2i+1)}{(2i+1)\cdot(-2i+1)}=\frac{8i+1}{5}=(\frac{8}{5}i+\frac{1}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x-(\frac{1}{2}i+1))^2=(6i+\frac{7}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*)\quad 4\cdot(x-(\frac{1}{2}i+1))^2=24i+7.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $24i+7$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2=u^2-v^2+2uvi,$ daher

$$(u+vi)^2=24i+7$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = 7 \\ 2uv = 24. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i + 4).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2{\cdot}(x - (\frac{1}{2}i + 1)) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i - 1$ und $x_2 = 2i + 3$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 92B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 2i$, $a - b = -4i - 2$ und $ab = -4i + 2$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a{\cdot}\overline{b}}{b{\cdot}\overline{b}} = \frac{(-i-1){\cdot}(-3i+1)}{(3i+1){\cdot}(-3i+1)} = \frac{2i-4}{10} = (\frac{1}{5}i - \frac{2}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - \frac{1}{2}i)^2 = -(5i + \frac{21}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4{\cdot}(x - \frac{1}{2}i)^2 = -20i - 21.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-20i - 21$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -20i - 21$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -21 \\ 2uv = -20. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i - 2).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2{\cdot}(x - \frac{1}{2}i) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i + 1$ und $x_2 = 3i - 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 93B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -i$, $a - b = -5i + 2$ und $ab = 5i + 5$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(-3i+1)\cdot(-2i-1)}{(2i-1)\cdot(-2i-1)} = \frac{i-7}{5} = (\frac{1}{5}i - \frac{7}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (\frac{1}{2}i - \frac{3}{2}))^2 = (\frac{3}{2}i - 2)$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4\cdot(x - (\frac{1}{2}i - \frac{3}{2}))^2 = 6i - 8.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $6i-8$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u+vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = 6i - 8$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -8 \\ 2uv = 6. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i + 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (\frac{1}{2}i - \frac{3}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i - 2$ und $x_2 = 2i - 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 94B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = i + 3$, $a - b = -5i - 1$ und $ab = -i + 8$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(-2i+1)\cdot(-3i+2)}{(3i+2)\cdot(-3i+2)} = \frac{-7i-4}{13} = -(\frac{7}{13}i + \frac{4}{13}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x-(\frac{1}{2}i+\frac{5}{2}))^2=(\frac{5}{2}i-6)$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*)\quad 4\cdot(x-(\frac{1}{2}i+\frac{5}{2}))^2=10i-24.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $10i-24$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2=u^2-v^2+2uvi,$ daher

$$(u+vi)^2=10i-24$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*}\quad\begin{cases}u^2-v^2=-24\\ 2uv=10.\end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u,v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z=u+vi=\pm(5i+1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x-(\frac{1}{2}i+\frac{5}{2}))=\pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1=-2i+2$ und $x_2=3i+3$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 95B

Lösung.

(1) Es ist $a+b=-2i-1,\ a-b=-5$ und $ab=i-7$.
Den Quotienten $\dfrac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}}=\frac{(-i-3)\cdot(i+2)}{(-i+2)\cdot(i+2)}=\frac{-5i-5}{5}=-(i+1).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x-(\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}))^2=(\frac{15}{2}i+4)$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*)\quad 4\cdot(x-(\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}))^2=30i+16.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $30i+16$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2=u^2-v^2+2uvi,$ daher

$$(u+vi)^2=30i+16$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = 16 \\ 2uv = 30. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i + 5).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2{\cdot}(x - (\frac{1}{2}i + \frac{1}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i - 2$ und $x_2 = 2i + 3$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 96B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -i - 2$, $a - b = 5i - 4$ und $ab = 11i + 3$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a{\cdot}\overline{b}}{b{\cdot}\overline{b}} = \frac{(2i-3){\cdot}(3i+1)}{(-3i+1){\cdot}(3i+1)} = \frac{-7i-9}{10} = -(\frac{7}{10}i + \frac{9}{10}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + \frac{1}{2}i)^2 = (15i + \frac{11}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4{\cdot}(x + \frac{1}{2}i)^2 = 60i + 11.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $60i + 11$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = 60i + 11$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = 11 \\ 2uv = 60. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(5i + 6).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2{\cdot}(x + \frac{1}{2}i) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i - 3$ und $x_2 = 2i + 3$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 97B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -i - 3$, $a - b = 3i - 1$ und $ab = 3i + 4$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(i-2)\cdot(2i-1)}{(-2i-1)\cdot(2i-1)} = \frac{-5i}{5} = -i.$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x + (i + \frac{5}{2}))^2 = -(2i + \frac{15}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4\cdot(x + (i + \frac{5}{2}))^2 = -8i - 15.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-8i - 15$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -8i - 15$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -15 \\ 2uv = -8. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(4i - 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + (i + \frac{5}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i - 2$ und $x_2 = i - 3$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 98B

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 3i$, $a - b = i + 4$ und $ab = -2i - 6$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{(2i+2)\cdot(-i-2)}{(i-2)\cdot(-i-2)} = \frac{-6i-2}{5} = -(\frac{6}{5}i + \frac{2}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x-(\frac{1}{2}i+\frac{3}{2}))^2=(\frac{5}{2}i-6)$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*)\quad 4\cdot(x-(\frac{1}{2}i+\frac{3}{2}))^2=10i-24.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $10i-24$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2=u^2-v^2+2uvi,$ daher

$$(u+vi)^2=10i-24$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*}\quad\begin{cases}u^2-v^2=-24\\ 2uv=10.\end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u,v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z=u+vi=\pm(5i+1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x-(\frac{1}{2}i+\frac{3}{2}))=\pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1=-2i+1$ und $x_2=3i+2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 3 Exemplar 99B

Lösung.

(1) Es ist $a+b=i-1,\ a-b=-3i+5$ und $ab=7i-4.$

Den Quotienten $\dfrac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}}=\frac{(-i+2)\cdot(-2i-3)}{(2i-3)\cdot(-2i-3)}=\frac{-i-8}{13}=-(\frac{1}{13}i+\frac{8}{13}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x-\frac{1}{2}i)^2=-(6i-\frac{7}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*)\quad 4\cdot(x-\frac{1}{2}i)^2=-24i+7.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-24i+7$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2=u^2-v^2+2uvi,$ daher

$$(u+vi)^2=-24i+7$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = 7 \\ 2uv = -24. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i - 4).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2 \cdot (x - \frac{1}{2}i) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i + 2$ und $x_2 = 2i - 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.