

Wir betrachten einen orientierten 3-dimensionalen euklidischen Vektorraum V und bilden die direkte Summe $\Gamma := \mathbf{R} \oplus V$. Zeigen Sie:

- (1) Auf Γ läßt sich eindeutig eine Multiplikation „ \cdot “ definieren, bei der die beiderseitige Multiplikation mit Elementen von \mathbf{R} durch die skalare Multiplikation im \mathbf{R} -Vektorraum Γ gegeben ist und so, daß für $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in V$ gilt $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = -\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$. Γ wird durch diese Multiplikation zu einem (nichtkommutativen) Ring.
- (2) Die Abbildung $\varphi : \mathbf{R} \oplus V \rightarrow \mathbf{R} \oplus V$ mit $\varphi(a + \mathbf{u}) = a - \mathbf{u}$ für $a \in \mathbf{R}, \mathbf{u} \in V$ ist \mathbf{R} -linear, und es ist $\varphi(\alpha \cdot \beta) = \varphi(\beta) \cdot \varphi(\alpha)$ für $\alpha, \beta \in \Gamma$. Weiter wird durch $N : \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$ mit

$$N(\alpha) := \sqrt{\alpha \cdot \varphi(\alpha)}, \quad \alpha \in \Gamma$$

eine Norm auf dem Vektorraum Γ gegeben, d.h. es gelten die folgenden Eigenschaften:

- (i) Für $\mathbf{x} \in \Gamma$ ist $N(\mathbf{x}) \geq 0$ mit Gleichheit genau dann, wenn $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
 - (ii) Für $\mathbf{x} \in V$ und $\alpha \in \mathbf{R}$ ist $N(\alpha \cdot \mathbf{x}) = |\alpha| \cdot N(\mathbf{x})$.
 - (iii) Für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ gilt $N(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq N(\mathbf{x}) + N(\mathbf{y})$.
- (3) Mit der obigen Multiplikation ist $\Gamma - \{0\}$ eine Gruppe.