Schulze, R. [1]; Römisch, W. [2]

NUMERISCHE METHODEN FÜR STOCHASTISCHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN UND STOCHASTISCHE OPTIMALSTEUERUNGSPROBLEME

In dieser Arbeit werden das Kennwertanalyseproblem für nichtlineare stochastische Differentialgleichungen bzw. Volterrasche Integralgleichungen und stochastische Optimalsteuerungsprobleme mit linearer Steuergleichung behandelt. Die Verfahren basieren auf den in /1/ dargestellten Simulationsmethoden zur Approximation von stochastischen Prozessen und gestatten eine unmittelbare numerische Umsetzung. Die näherungsweise Bestimmung der Lösung einer stochastischen Differentialgleichung bzw. der stochastischen Optimalsteuerung wird auf die Lösung einer endlichen Familie von Lösungen determinierter Differentialgleichungen bzw. determinierter Optimalsteuerungsprobleme zurückgeführt. Werden nun Kennwerte der Lösung gesucht, ergeben sich vollständig determinierte Verfahren. Im Unterschied zu bekannten Verfahren, wie z.B. Korrelationsmethoden für lineare Gleichungen, Methoden der Ito-Gleichungen für Markovprozesse und Simulation mittels Zufallsgeneratoren gelten die hier abgeleiteten Methoden sowohl für eine sehr große Klasse von stochastischen Prozessen als auch für eine sehr große Klasse von Gleichungen und sind frei von Zufalls-generatoren.

Im weiteren sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum, $T = [0, t_e]$

$z: T \times \Omega \longrightarrow R$ mit $z(t) \in L_2(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und $\int_0^{t_e} \|z(t)\|_2 \, dt < \infty$

$f: T \times T \times R \times R \longrightarrow R$ stetig und in den letzten beiden Argumenten Lipschitzstetig mit L

Dies rechtfertigt die Betrachtung der folgenden Integralgleichungen:

---

[1], [2] Dr. rer. nat. Humboldt-Universität Berlin, DDR

$$(1)\qquad d(t) = d_0 + \int_0^t f(t,s,d(s),e(s))ds \ , \ t \in T \quad \text{und}$$

$$(2)\qquad x(t) = x_0 + \int_0^t f(t,s,x(s),z(s))ds \ , \ t \in T \quad \text{wobei}$$

$f(t,s,x(s),z(s))(\omega) = f(t,s,x(s,\omega),z(s,\omega))$

für P-fast alle $\omega \in \Omega$ und $t,s \in T$

$e\colon T \longrightarrow R$ und $\int_0^{t_e} |e(t)|\,dt < \infty$

$d\colon T \longrightarrow R$ stetig

$x\colon T \times \Omega \longrightarrow R$ im quadratischen Mittel stetig.

Gleichung (1) stellt eine gewöhnliche determinierte Volterrasche Integralgleichung dar; Gleichung (2) eine stochastische Volterrasche Integralgleichung.

Satz:

a) Für beliebige $d_0 \in R$ und $e\colon T \longrightarrow R$ und $\int_0^{t_e} |e(t)|\,dt < \infty$ existiert eine eindeutig bestimmte stetige Lösung $d^*\colon T \longrightarrow R$ von (1) und es gilt, falls

d_1^* Lösung zu d_{01}, e_1 und

d_2^* Lösung zu d_{02}, e_2

$$\max_{t \in T} |d_1^*(t) - d_2^*(t)| \leq e^{Lt_e} \left\{ |d_{01} - d_{02}| + L \int_0^{t_e} |e_1(s) - e_2(s)|\,ds \right\}$$

b) Für beliebige $x_0 \in L_2(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und

$z\colon T \times \Omega \longrightarrow R$ mit $\int_0^{t_e} \|z(s)\|_2\,ds < \infty$

existiert eine eindeutig bestimmte Lösung $x^*\colon T \times \Omega \longrightarrow R$ und im quadratischen Mittel stetig von (2) und es gilt, falls

x_1^* Lösung von (2) zu x_{01}, z_1 und

x_2^* Lösung von (2) zu x_{02}, z_2

$$\max_{t \in T} \|x_1^*(t) - x_2^*(t)\|_2 \leq e^{Lt_e} \left\{ \|x_{01} - x_{02}\|_2 + L \int_0^{t_e} \|z_1(s) - z_2(s)\|_2\,ds \right\}$$

Die Aussagen a) und b) sind bekannte Resultate für Gleichungen in Banachräumen.

Wir verwenden nun die in /1/ hergeleiteten Näherungsdarstellungen und erhalten damit für x_o und z :

$$z_{n,k}(t,\omega) = E(z(t)|A_l^{(n,k)}) =: e_l(t) \quad \text{falls } \omega \in A_l^{(n,k)}$$

$$x_o^{(n,k)}(\omega) = E(x_o|A_l^{(n,k)}) =: d_{ol} \quad \text{falls } \omega \in A_l^{(n,k)}$$

$l = 1,\dots,n^k$; $t \in T$ und erhalten:

<u>Satz:</u>

a) $x^*_{n,k}$ ist genau dann Lösung von Gleichung (2) mit $x_o^{(n,k)}$, $z_{n,k}$ wenn für $l = 1,\dots,n^k$ d_l^* Lösung von Gleichung (1) mit d_{ol} , e_l , d.h.

$$d_l(t) = d_{ol} + \int_o^t f(t,s,d_l(s),e_l(s))\, ds \qquad (3)$$

wobei $x^*_{n,k}(t,\omega) = d_l^*(t)$ falls $\omega \in A_l^{(n,k)}$ und $t \in T$

b) Erfüllen x_o und z alle Voraussetzungen zur Approximation (d.h. z.B.: z stochastisch stetig; vgl. /1/), so gilt:

$$\max_{t\in T} \| x^*_{n,k}(t) - x^*(t)\|_2 \le e^{Lt_e} \left\{ \|x_o^{(n,k)} - x_o\|_2 + L\int_o^{t_e} \|z_{n,k}(s) - z(s)\|_2 ds \right\}$$

und somit:

$$\lim_{n,k\to\infty} \max_{t\in T} \|x^*_{n,k}(t) - x^*(t)\|_2 = 0$$

Der Beweis folgt unmittelbar daraus, daß für alle $s \in T$

$\|z_{n,k}(s) - z(s)\|_2 \xrightarrow[n,k\to\infty]{} 0$ und $|z_{n,k}(s)| \le |z(s)|$ und

somit $\int_o^{t_e} \|z_{n,k}(s) - z(s)\|_2\, ds \xrightarrow[n,k\to\infty]{} 0$ (Satz von Lebesgue)

und $\| x_o^{(n,k)} - x_o \|_2 \xrightarrow[n,k\to\infty]{} 0$.

Wir wollen nun Kennwerte wie Korrelationsfunktionen, Momentfunktionen, Verteilungen u.ä. von den Lösungen dieser stochastischen Integralgleichungen bestimmen. Dazu benutzen wir für solche Kennwerte K die folgende einheitliche Darstellung:

J sei eine beliebige Parametermenge

$g: J \times R \longrightarrow R$ eine im zweiten Argument meßbare Funktion

$w, x \in L_2(\Omega, \mathfrak{A}, P)$

und definieren damit

$K(j) := E(g(j,x)\cdot w)$

Alle hier interessierenden Kennwerte lassen sich in dieser Form aufschreiben(Eine allgemeinere Darstellung, die auch für Verteilungen höherer Ordnung gültig ist,findet man z.B. in /2/ und /3/. Zur Veranschaulichung des prinzipiellen Vorgehens reicht die hier angegebene Darstellung zunächst aus). Für jede Näherungslösung galt

$$x^*_{n,k}(t,\omega) = d^*_l(t) \quad \text{falls } \omega \in A_l^{(n,k)} \quad \text{und } t \in T$$

Dies setzen wir in die Darstellung für K ein und erhalten:

$$K(j,t) = E(g(j,x^*_{n,k}(t))\cdot w) =$$

$$= \sum_{l=1}^{n^k} g(j,d^*_l(t))\cdot E(w\,|A_l^{(n,k)})\; P(A_l^{(n,k)}) \qquad (4)$$

<u>Praktische Realisierung der Verfahren</u>

i) Bestimmung bzw. Berechnung der sog. Eingabekennwerte

$$\left\{ d_{ol} = E(x_o|A_l^{(n,k)}) \;,\; e_l(t) = E(z(t)|A_l^{(n,k)}) \;,\; t\in T \;,\; E(w|A_l^{(n,k)}) \;,\; P(A_l^{(n,k)}) \right\}_{l=1}^{n^k}$$

mittels einer der in /1/ angedeuteten Verfahren. Diese Eingabekennwerte sind ebenfalls Kennwerte im obigen Sinn .

ii) Berechnung von $\left\{ d^*_l(t) \;,\; t\in T \right\}_{l=1}^{n^k}$, d.h. Lösung von gewöhnlichen Integralgleichungen (3) bzw. gegebenenfalls von dazu äquivalenten Differentialgleichungen mittels geeigneter numerischer Verfahren.

iii) Darstellung des gesuchten Kennwertes in obiger Form (bzw. in der allgemeineren Darstellung gemäß /2/)

iv) Berechnung von $K(j,t)$ durch "Mittelwertbildung" entsprechend (4).

Stochastische Optimalsteuerung

Wir betrachten hier i.a. eine lineare Vektor-Differentialgleichung $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$ zum Anfangswert x_o in stochastischen Prozessen. Zur Vereinfachung der Darstellung sei sie eindimensional, d.h. $A(t)$, $B(t)$ sind reellwertige stetige Funktionen.

$r: T\times\Omega \longrightarrow R$

Bezeichne ferner $x[u]$ die Lösung obiger Differentialgleichung zum Anfangswert x_o und bekanntem r. Wir suchen nun einen stochastischen Prozeß $u: T\times\Omega \longrightarrow R$, die sogenannte stochastische Optimalsteuerung, derart, daß

$$H(u) = \alpha\int_0^{t_e} E\left[(x[u](t) - y(t))^2\right]dt + \beta\int_0^{t_e} E\left[(u(t)-v(t))^2\right]dt$$

minimisiert wird, wobei y, v selbst vorgegebene stochastische Prozesse, $y,v: T\times\Omega \longrightarrow R$, sind.
Der zweite Term fungiert hier als Regularisierungsterm (Regularisierung nach Tichonow), d.h. für $\beta > 0$ erhält man stets eindeutige Lösungen u^*. Ohne hier genauer auf theoretische Resultate einzugehen (eine ausführliche Darlegung findet man in /5/), können wir auch in diesem Fall die in /1/ hergeleiteten Darstellungen für stochastische Prozesse zur Bestimmung einer stochastischen Optimalsteuerung benutzen. Dementsprechend finden wir für x_o,y,r,v Näherungsdarstellungen

$$x_o^{(n,k)}(\omega) = d_{ol} \qquad \text{für } \omega \in A_l^{(n,k)}$$

$$y_{n,k}(t,\omega) = b_l(t) \qquad \text{für } \omega \in A_l^{(n,k)}$$

$$v_{n,k}(t,\omega) = c_l(t) \qquad \text{für } \omega \in A_l^{(n,k)}$$

$$r_{n,k}(t,\omega) = e_l(t) \qquad \text{für } \omega \in A_l^{(n,k)}$$

wobei $t \in T$ und $l = 1,\ldots,n^k$ und erhalten:

Satz:

a) $u_{n,k}^*$ minimisiert

$$H_{n,k}(u_{n,k}) = \alpha\int_0^{t_e} E\left[(x[u_{n,k}](t)-y_{n,k}(t))^2\right]dt +$$

$$+\beta\int_0^{t_e} E\left[(u_{n,k}(t) - v_{n,k}(t))^2\right]dt$$

genau dann wenn für alle $l = 1,\ldots,n^k$

$a_l^*: T \longrightarrow R$ minimisiert

$$h(a_l) = \alpha\int_0^{t_e}(d_l[a_l](t) - b_l(t))^2 dt + \beta\int_0^{t_e}(a_l(t) - c_l(t))^2 dt \qquad \text{wobei } d_l[a_l]$$

die Lösung der Gleichung

$$\dot{d}_l(t) = A(t)d_l(t) + B(t)a_l(t) + e_l(t)$$

zum Anfangswert d_{ol} bezeichnet und

$$u^*_{n,k}(t,\ ) = a_l^*(t) \quad \text{für } \omega \in A_l^{(n,k)} \quad \text{und } t \in T$$

b) $H_{n,k}(u^*_{n,k}) \xrightarrow[n,k\to\infty]{} H(u^*)$

c) Ist $\beta > 0$ so gilt:

$$\int_0^{t_e} E\left[(u^*_{n,k}(t) - u^*(t))^2\right]dt \longrightarrow 0 \quad \text{für } n,k \longrightarrow \infty$$

d) Die Aussagen a), b), c) behalten entsprechend ihre Gültigkeit, wenn die Steuerungen gewisse Betragsbeschränkungen erfüllen sollen.

e) Kennwerte der Optimalsteuerungen $u^*_{n,k}$ bestimmen sich entsprechend (4).

Als Eingabekennwerte müssen hier

$$\left\{d_{ol}\ ,\ b_l\ ,\ c_l\ ,\ e_l\ ,\ E(w|A_l^{(n,k)})\ ,\ P(A_l^{(n,k)})\right\}_{l=1}^{n^k}$$

bekannt seien. Sind mehrere Prozesse gleichzeitig zu approximieren, wählen wir k Zufallsvariablen zur Konstruktion der $A_l^{(n,k)}$ so aus, daß alle Prozesse berücksichtigt werden.

Beide Verfahren wurden in Form von ALGOL-Programmen (GINT und GOST) realisiert und an mehreren Beispielen getestet, wobei die Eingangsprozesse als normalverteilt angenommen wurden.

<u>Literatur:</u>

/1/ Römisch, W., Schulze, R.: Ein Verfahren zur Simulation stochastischer Prozesse; Anwendung auf spezielle

Prozeßklassen, Kongreßberichte der IKM 1978, HAB Weimar

/2/ Römisch, W., Schulze, R., Sohr, D.: Kennwertmethoden für Volterrasche Integralgleichungen in stochastischen Prozessen, Dissertation A, Humboldt-Universität Berlin, 1976

/3/ Schulze, R., Römisch, W.; Numerische Methoden für stochastische Differentialgleichungen, Berichte der Tagung "Stochastische Schwingungen und Zuverlässigkeit", ZIMM der AdW Berlin, 1977

/4/ Bunke, H.: Gewöhnliche Differentialgleichungen mit zufälligen Parametern, Berlin 1972

/5/ Römisch, W., Schulze, R.: Kennwertmethoden zur Behandlung des Tracking-Problems mit stochastischen Parametern, Forschungsbericht, Humboldt-Universität Berlin, 1975

/6/ Gichman, I., I., Skorochod, A., W.: Stochastische Differentialgleichungen, Berlin 1971

/7/ Model, N.: Ein lineares stochastisches Steuerproblem, Forschungsbericht, ZIMM der AdW Berlin, 1976