

# Allgemeine lineare Verfahren für den Entwurf integrierter Schaltungen

Dipl. Math. Steffen Voigtmann



**DFG Research Center MATHEON**  
Mathematics for key technologies

HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN



# Entwurf integrierter Schaltungen

Rand-  
bedingungen

Design  
Spezifikation



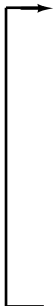
Entwurf des  
Schaltplans



Simulation und  
Charakterisierung



Spezifikation  
erfüllt?



Produktion



# DAEs in der Schaltungssimulation

- ▶ Modellierung führt auf Algebra-Differentialgleichungen (DAEs)

$$A \frac{d}{dt} d(x(t), t) + b(x(t), t) = 0$$



# DAEs in der Schaltungssimulation

- ▶ Modellierung führt auf Algebra-Differentialgleichungen (DAEs)

$$A \frac{d}{dt} d(x(t), t) + b(x(t), t) = 0$$

- ▶ Eigenschaften

- ▶  $\sim 10^6$  Gleichungen
- ▶ komplexe Transistormodelle
- ▶ geringe Glattheitseigenschaften
- ▶ steigende Takt- und Datenraten
- ▶ Miniaturisierung
- ▶ Mehrskalenprobleme



# DAEs in der Schaltungssimulation

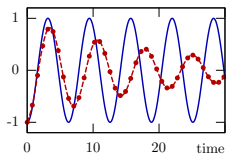
- ▶ Modellierung führt auf Algebra-Differentialgleichungen (DAEs)

$$A \frac{d}{dt} d(x(t), t) + b(x(t), t) = 0$$

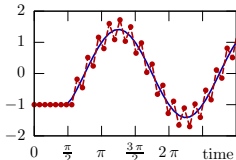
- ▶ Eigenschaften

- ▶  $\sim 10^6$  Gleichungen
- ▶ komplexe Transistormodelle
- ▶ geringe Glattheitseigenschaften
- ▶ steigende Takt- und Datenraten
- ▶ Miniaturisierung
- ▶ Mehrskalenprobleme

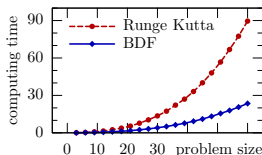
- ▶ Probleme klassischer Verfahren



**BDF**  
starke num. Dämpfung



**Trapezregel**  
künstliche Oszillationen



**Runge-Kutta Verfahren**  
hohe Kosten (Rechenzeit)



# DAEs in der Schaltungssimulation

- ▶ Modellierung führt auf Algebra-Differentialgleichungen (DAEs)

$$A \frac{d}{dt} d(x(t), t) + b(x(t), t) = 0$$

- ▶ Eigenschaften

- ▶  $\sim 10^6$  Gleichungen
- ▶ komplexe Transistormodelle
- ▶ geringe Glattheitseigenschaften
- ▶ steigende Takt- und Datenraten
- ▶ Miniaturisierung
- ▶ Mehrskalenprobleme

- ▶ Probleme klassischer Verfahren



Untersuchung neuartiger Integrationsverfahren  
(allgemeine lineare Verfahren)  
für die Zeitbereichsanalyse integrierter Schaltungen



Modellierung von Schaltungen  
und Strukturausnutzung

Weiterentwicklung der  
Theorie der DAEs

Theorie und Praxis von  
allgemeinen linearen Verfahren



# Überblick

## Algebra-Differentialgleichungen

## Allgemeine lineare Verfahren

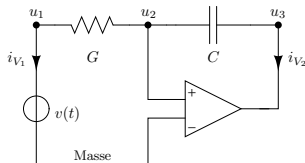
## Praxis allgemeiner linearer Verfahren



# Modellierung elektrischer Schaltungen

## Miller Integrator

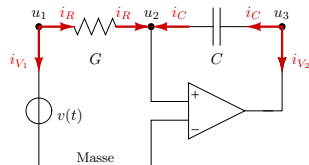
- ▶ Widerstand  $i_R = G(u_1 - u_2)$
- ▶ Kondensator  $i_C = \dot{q}(u_3 - u_2)$
- ▶ Spannungsquelle  $u_1 = v(t)$
- ▶ Opamp  $u_3 = a \cdot u_2$



# Modellierung elektrischer Schaltungen

## Miller Integrator

- ▶ Widerstand  $i_R = G(u_1 - u_2)$
- ▶ Kondensator  $i_C = \dot{q}(u_3 - u_2)$
- ▶ Spannungsquelle  $u_1 = v(t)$
- ▶ Opamp  $u_3 = a \cdot u_2$



## Kirchhoffs Strom-Regel

$$0 = i_{V_1} + i_R$$

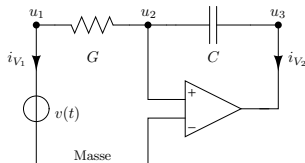
$$0 = -i_R - i_C$$

$$0 = i_C + i_{V_2}$$

# Modellierung elektrischer Schaltungen

## Miller Integrator

- ▶ Widerstand  $i_R = G(u_1 - u_2)$
- ▶ Kondensator  $i_C = \dot{q}(u_3 - u_2)$
- ▶ Spannungsquelle  $u_1 = v(t)$
- ▶ Opamp  $u_3 = a \cdot u_2$



## Kirchhoffs Strom-Regel

$$0 = i_{V_1} + i_R$$

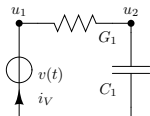
$$0 = -i_R - i_C$$

$$0 = i_C + i_{V_2}$$

## MNA Gleichungen

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}(u_3 - u_2) + \begin{bmatrix} -G(u_1 - u_2) \\ i_{V_2} \\ i_{V_1} + G_1(u_1 - u_2) \\ u_1 - v(t) \\ u_3 - a \cdot u_2 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{singulär}}}{A} \underbrace{\left( q(x(t), t) \right)'}_{\substack{\uparrow \\ \text{Ladungen/} \\ \text{Flüsse}}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Potentiale/} \\ \text{Ströme}}}{b(x(t), t)} = 0$$

# Eigenschaften von DAEs



$$i_V + G_1(u_1 - u_2) = 0$$

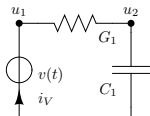
$$C_1 u_2' - G_1(u_1 - u_2) = 0$$

$$u_1 - v(t) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$u_2' = \frac{G_1}{C_1}(v - u_2)$$

# Eigenschaften von DAEs



$$i_V + G_1(u_1 - u_2) = 0$$

$$C_1 u_2' - G_1(u_1 - u_2) = 0$$

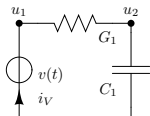
$$u_1 - v(t) = 0$$

$$\Downarrow$$

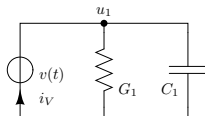
$$u_2' = \frac{G_1}{C_1}(v - u_2)$$

- ▶ nicht alle Komponenten müssen differenzierbar sein
- ▶ Anfangswerte müssen *konsistent* sein

# Eigenschaften von DAEs



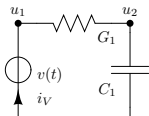
$$\begin{aligned} i_V + G_1(u_1 - u_2) &= 0 \\ C_1 u_2' - G_1(u_1 - u_2) &= 0 \\ u_1 - v(t) &= 0 \\ \Downarrow \\ u_2' &= \frac{G_1}{C_1}(v - u_2) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} C_1 u_1' + i_V + G_1 u_1 &= 0 \\ u_1 - v(t) &= 0 \\ \Downarrow \\ i_V &= -C_1 v' - G_1 v \end{aligned}$$

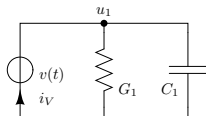
- ▶ nicht alle Komponenten müssen differenzierbar sein
- ▶ Anfangswerte müssen *konsistent* sein

# Eigenschaften von DAEs



$$\begin{aligned} i_V + G_1(u_1 - u_2) &= 0 \\ C_1 u_2' - G_1(u_1 - u_2) &= 0 \\ u_1 - v(t) &= 0 \\ \Downarrow \\ u_2' &= \frac{G_1}{C_1}(v - u_2) \end{aligned}$$

Index-1



$$\begin{aligned} C_1 u_1' + i_V + G_1 u_1 &= 0 \\ u_1 - v(t) &= 0 \\ \Downarrow \\ i_V &= -C_1 v' - G_1 v \end{aligned}$$

Index-2

- ▶ nicht alle Komponenten müssen differenzierbar sein
- ▶ Anfangswerte müssen *konsistent* sein
- ▶ der Lösungsprozess kann **numerische Differentiation** erfordern

# Komplexität von DAEs

|         | $A[Dx]' + Bx = q$ | $A[Dx]' + b(x, \cdot) = 0$ | $A d'(x, \cdot) + b(x, \cdot) = 0$ |
|---------|-------------------|----------------------------|------------------------------------|
| Index 0 |                   |                            |                                    |
| Index 1 |                   |                            |                                    |
| Index 2 |                   |                            |                                    |



# Komplexität von DAEs

|         | $A[Dx]' + Bx = q$ | $A[Dx]' + b(x, \cdot) = 0$<br>$Mx' = f(x, \cdot)$ | $A d'(x, \cdot) + b(x, \cdot) = 0$ |
|---------|-------------------|---|------------------------------------|
| Index 0 | Gew. DGLn.        |   |                                    |
| Index 1 |                   |   |                                    |
| Index 2 |                   |   |                                    |

$$y' = f(y, t)$$

Gewöhnliche Differentialgleichungen

- ▶ klassische Resultate (Theorie, Numerik)
- ▶ Butcher, Dahlquist, Gear, Hairer, Petzold, ...



# Komplexität von DAEs

|         | $A[Dx]' + Bx = q$ | $A[Dx]' + b(x, \cdot) = 0$<br>$Mx' = f(x, \cdot)$ | $A d'(x, \cdot) + b(x, \cdot) = 0$ |
|---------|-------------------|---|------------------------------------|
| Index 0 | Gew. DGLn.        |   |                                    |
| Index 1 | lin. DAEs         |   |                                    |
| Index 2 |                   |   |                                    |

$$Ex' + Fx = q$$

$$A[Dx]' + Bx = q$$

linear DAEs

- ▶ Standard-Form (Kunkel/Mehrmann)
- ▶ proper formuliert (März, Balla)



# Komplexität von DAEs

|         | $A[Dx]' + Bx = q$ | $A[Dx]' + b(x, \cdot) = 0$<br>$Mx' = f(x, \cdot)$ | $A d'(x, \cdot) + b(x, \cdot) = 0$ |
|---------|-------------------|---|------------------------------------|
| Index 0 | Gew. DGLn.        |   |                                    |
| Index 1 | lin. DAEs         |   |                                    |
| Index 2 | ← Hessenberg →    |   |                                    |

$$y' = f(y, z)$$

$$0 = g(z)$$

DAEs in Hessenberg-Form

- ▶ Runge-Kutta Verf. (Hairer/Wanner, Kværnø)
- ▶ lin. Mehrschrittverf. (Campbell, Gear, Petzold)



# Komplexität von DAEs

|         | $A[Dx]' + Bx = q$ | $A[Dx]' + b(x, \cdot) = 0$<br>$Mx' = f(x, \cdot)$ | $A d'(x, \cdot) + b(x, \cdot) = 0$ |
|---------|-------------------|---|------------------------------------|
| Index 0 | Gew. DGLn.        |   |                                    |
| Index 1 | lin. DAEs         |   | nichtlin. Index-1 DAEs             |
| Index 2 | ← Hessenberg →    |   |                                    |

$A d'(x, \cdot) + b(x, \cdot) = 0$  nichtlineare Index-1 DAEs (proper formuliert)

- ▶ Erweiterung der Entkopplungsprozedur linearer DAEs
- ▶ März, Higuera (2004)



# Komplexität von DAEs

|         | $A[Dx]' + Bx = q$ | $A[Dx]' + b(x, \cdot) = 0$<br>$Mx' = f(x, \cdot)$ | $A d'(x, \cdot) + b(x, \cdot) = 0$ |
|---------|-------------------|---|------------------------------------|
| Index 0 | Gew. DGLn.        |   |                                    |
| Index 1 | lin. DAEs         |   | nichtlin. Index-1 DAEs             |
| Index 2 | ← Hessenberg →    |   | Schaltungssimulation               |

$$A d'(x, \cdot) + b(Ux, \cdot) + BTx = 0$$

DAEs aus der Schaltungssimulation

- ▶ Index 2, aber keine Hessenberg-Form
- ▶ Tischendorf, Estévez Schwarz (Initialisierung)



# Komplexität von DAEs

|         | $A[Dx]' + Bx = q$ | $A[Dx]' + b(x, \cdot) = 0$<br>$Mx' = f(x, \cdot)$ | $A d'(x, \cdot) + b(x, \cdot) = 0$                 |
|---------|-------------------|---|--|
| Index 0 | Gew. DGLn.        |   |  |
| Index 1 | lin. DAEs         |   | nichtlin. Index-1 DAEs                             |
| Index 2 | ← Hessenberg →    |   | Schaltungssimulation<br>prop. formul. Index-2 DAEs |

$A d'(x, \cdot) + b(x, \cdot) = 0$  proper formulierte nichtlineare DAEs mit Index 2

- ▶ Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen
- ▶ Konvergenzresultate, Verfahrenskonstruktion



# Mathematische Strukturerkennung

## ► Modifizierte Knotenanalyse

$$A \dot{q}(x, \cdot) + b(x, \cdot) = 0$$

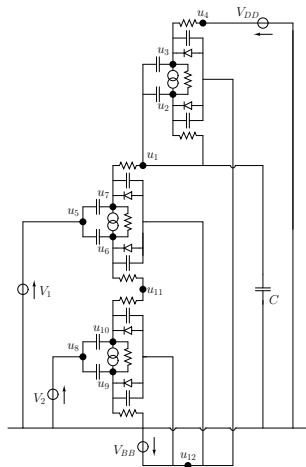
## ► Analysis: Traktabilitäts-Index

- ▷ geringe Glattheitsanforderungen
- ▷ Projektoren  $P_i$ ,  $Q_i$ ,  $T$  und Matrixkette

$$D(x, t) = q_x(x, t), \quad B_0(x, t) = b_x(x, t),$$

$$G_0 = AD, \quad G_{i+1} = G_i + B_i Q_i,$$

$$\text{im } Q_i = \ker G_i \quad P_i = I - Q_i.$$



# Mathematische Strukturerkennung

## ► Modifizierte Knotenanalyse

$$A \dot{q}(x, \cdot) + b(x, \cdot) = 0$$

## ► Analysis: Traktabilitäts-Index

- ▷ geringe Glattheitsanforderungen
- ▷ Projektoren  $P_i$ ,  $Q_i$ ,  $T$  und Matrixkette

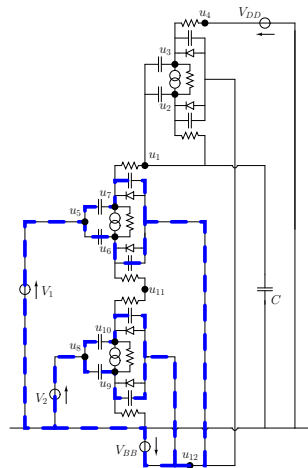
$$D(x, t) = q_x(x, t), \quad B_0(x, t) = b_x(x, t),$$

$$G_0 = AD, \quad G_{i+1} = G_i + B_i Q_i,$$

$$\text{im } Q_i = \ker G_i \quad P_i = I - Q_i.$$

## ► Index-2 Komponenten $T_x$

- ▷ Ströme durch Spannungsquellen in **CV Schleifen**
- ▷ Spannungen an Spulen und Stromquellen in **LI Schnittmengen**



# Mathematische Strukturerkennung

## ▶ Modifizierte Knotenanalyse

$$A \dot{q}(x, \cdot) + b(x, \cdot) = 0$$

## ▶ Analysis: Traktabilitäts-Index

- ▷ geringe Glattheitsanforderungen
- ▷ Projektoren  $P_i$ ,  $Q_i$ ,  $T$  und Matrixkette

$$D(x, t) = q_x(x, t), \quad B_0(x, t) = b_x(x, t),$$

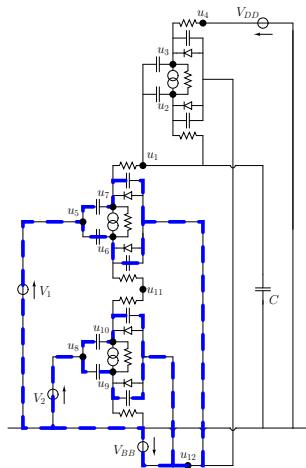
$$G_0 = AD, \quad G_{i+1} = G_i + B_i Q_i,$$

$$\text{im } Q_i = \ker G_i \quad P_i = I - Q_i.$$

## ▶ Index-2 Komponenten $Tx$

- ▷ Ströme durch Spannungsquellen in **CV Schleifen**
- ▷ Spannungen an Spulen und Stromquellen in **LI Schnittmengen**

## ▶ $N_0 \cap S_0$ ist unabhängig von $x$ ( $N_0 = \ker G_0$ , $S_0 = \{z \mid B_0 z \in \text{im } G_0\}$ )



# Proper formulierte Index-2 DAEs

$$A[Dx]' + b(x, \cdot) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} \ker A \oplus \operatorname{im} D &= \mathbb{R}^n, \\ \exists R \in C^1 : \operatorname{im} R &= \operatorname{im} D, \ker R = \ker A \end{aligned}$$



# Proper formulierte Index-2 DAEs

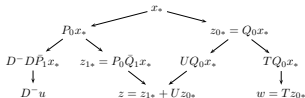
$$A[Dx]' + b(x, \cdot) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ker A \oplus \operatorname{im} D = \mathbb{R}^n, \\ \exists R \in C^1 : \operatorname{im} R = \operatorname{im} D, \ker R = \ker A$$

► **Idee:** Nutze angepasste Variablen

$$u = DP_1x, \quad w = Tx, \quad z = Zx \quad (Z = P_0Q_1 + UQ_0, \quad U = I - T)$$

Falls  $x$  eine Lösung ist, so

$$x = D^{-1}u + z + w \\ Dx = u + DQ_1x = u + Dz = u + v$$



# Proper formulierte Index-2 DAEs

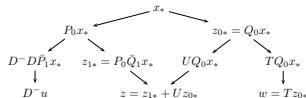
$$A[Dx]' + b(x, \cdot) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ker A \oplus \operatorname{im} D = \mathbb{R}^n, \\ \exists R \in C^1 : \operatorname{im} R = \operatorname{im} D, \ker R = \ker A$$

- **Idee:** Nutze angepasste Variablen

$$u = DP_1x, \quad w = Tx, \quad z = Zx \quad (Z = P_0Q_1 + UQ_0, \quad U = I - T)$$

Falls  $x$  eine Lösung ist, so

$$x = D^{-1}u + z + w \\ Dx = u + DQ_1x = u + Dz = u + v$$



- **Folgerung:**

$$F(u, w, z, u', v', \cdot) = A[Dx]' + b(x, \cdot) = 0.$$



# Lokale Existenz und Eindeutigkeit

## Satz.

- ▶ Die proper formulierte Index-2 DAE

$$F(u, w, z, u', v', \cdot) = A[Dx]' + b(x, \cdot) = 0, \quad F(u_0, w_0, z_0, \xi_0, \zeta_0, t_0) = 0$$

ist lokal äquivalent zu

$$\begin{aligned} u' &= f(u, v', t) & z &= z(u, t) \\ v &= g(u, t) & w &= w(u, v', t) \end{aligned}$$

# Lokale Existenz und Eindeutigkeit

## Satz.

- ▶ Die proper formulierte Index-2 DAE

$$F(u, w, z, u', v', \cdot) = A[Dx]' + b(x, \cdot) = 0, \quad F(u_0, w_0, z_0, \xi_0, \zeta_0, t_0) = 0$$

ist lokal äquivalent zu

$$\begin{aligned} u' &= f(u, v', t) & z &= z(u, t) \\ v &= g(u, t) & w &= w(u, v', t) \end{aligned}$$

- ▶ Für jedes  $x^0 \in \mathbb{R}^m$  besitzt das IVP

$$A[Dx]' + b(x, \cdot) = 0, \quad DP_1x(t_0) = DP_1x^0$$

genau eine Lösung  $x = D^{-1}u + z(u, \cdot) + w(u, v', \cdot)$ .

# Lokale Existenz und Eindeutigkeit

## Satz.

- ▶ Die proper formulierte Index-2 DAE

$$F(u, w, z, u', v', \cdot) = A[Dx]' + b(x, \cdot) = 0, \quad F(u_0, w_0, z_0, \xi_0, \zeta_0, t_0) = 0$$

ist lokal äquivalent zu

$$\begin{aligned} u' &= f(u, v', t) & z &= z(u, t) \\ v &= g(u, t) & w &= w(u, v', t) \end{aligned}$$

- ▶ Für jedes  $x^0 \in \mathbb{R}^m$  besitzt das IVP

$$A[Dx]' + b(x, \cdot) = 0, \quad DP_1x(t_0) = DP_1x^0$$

genau eine Lösung  $x = D^{-1}u + z(u, \cdot) + w(u, v', \cdot)$ .

implizite Index-1 Gleichung

( $I - f_{v'}g_u$  regulär)

# Lokale Existenz und Eindeutigkeit

$$A \dot{q}(x, \cdot) + b(x, \cdot) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} u' &= f(u, v', t) & z &= \mathbf{z}(u, t) \\ v &= g(u, t) & w &= \mathbf{w}(u, v', t) \end{aligned}$$

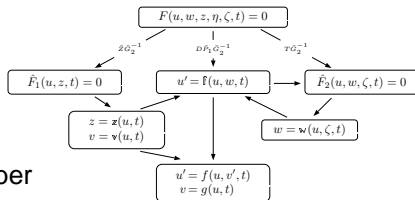
$$x = D^{-1}u + \mathbf{z}(u, \cdot) + \mathbf{w}(u, v', \cdot)$$

# Lokale Existenz und Eindeutigkeit

$$A \dot{q}(x, \cdot) + b(x, \cdot) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} u' &= f(u, v', t) & z &= \mathbf{z}(u, t) \\ v &= g(u, t) & w &= \mathbf{w}(u, v', t) \end{aligned}$$

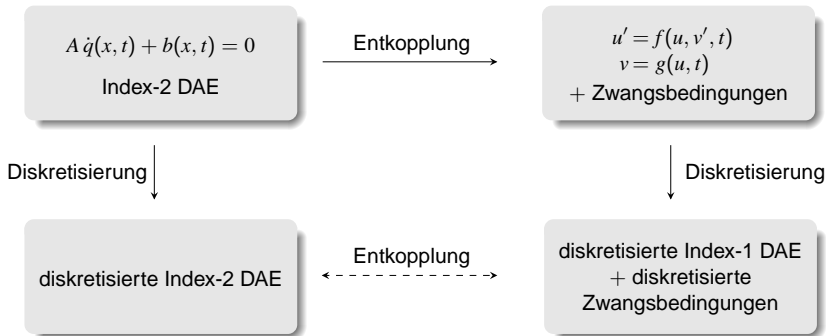
$$x = D^{-1}u + \mathbf{z}(u, \cdot) + \mathbf{w}(u, v', \cdot)$$

- ▶ neue Entkopplungsprozedur
- ▶ nur geringe Glattheitsvoraussetzungen
- ▶ umfasst/erweitert Resultate über

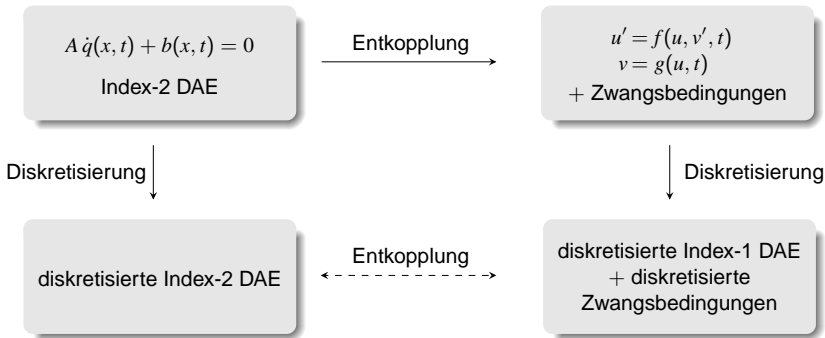


- ▷ lineare DAEs (Balla, März)
- ▷ nichtlineare Index-1 DAEs (Higuera, März)
- ▷ DAEs  $A[Dx]' + b(Ux, \cdot) + \mathfrak{B}Tx = 0$  (Tischendorf, Estévez Schwarz)
- ▷ Hessenberg DAEs (Hairer, Lubich, Roche, Wanner)

# Entkopplung und Diskretisierung



# Entkopplung und Diskretisierung



- **kommutatives Diagramm**, falls  $DN_1$  und  $DS_1$  konstant

$$(D = q_x, N_1 = \ker G_1, S_1 = \{z \mid B_0 z \in \text{im } G_1\})$$

# Contents

Algebro-Differentialgleichungen

**Allgemeine lineare Verfahren**

Praxis allgemeiner linearer Verfahren



# Klassifikation numerischer Verfahren

## ▶ Lineare Mehrschrittverfahren

- ⊕ geringe Kosten
- ⊕ sehr erfolgreich (BDF)
- ⊖ nicht A-stabil für  $p > 2$

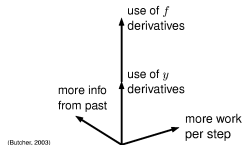
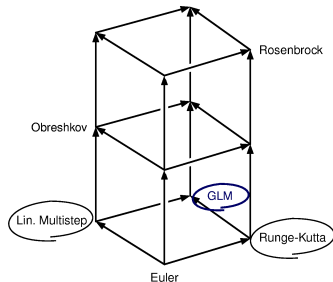
## ▶ Runge-Kutta Verfahren

- ⊕ Stabilitätseigenschaften
- ⊕ Schrittweitenänderung
- ⊖ hohe Kosten

## ▶ Allgemeine lineare Verfahren

(general linear methods, GLMs)

- ▷ kombiniere Vorteile beider Verfahrensklassen
- ▷ einheitlicher Rahmen für bekannte Verfahren
- ▷ neue Verfahren sind möglich



# GLMs für gewöhnliche DGLn. $y' = f(y)$

- Lin. Mehrschritt:  $y_n = h \beta_0 f(y_n) + \sum_{i=1}^k \alpha_i y_{n-i}$



# GLMs für gewöhnliche DGLn. $y' = f(y)$

► Lin. Mehrschritt:  $y_n = h \beta_0 f(y_n) + \sum_{i=1}^k \alpha_i y_{n-i}$



# GLMs für gewöhnliche DGLn. $y' = f(y)$

► Lin. Mehrschritt:  $y_n = h \beta_0 f(y_n) + \sum_{i=1}^k \alpha_i y_{n-i}$

► Runge-Kutta:  $Y_i = h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(Y_j) + y^{[n-1]},$

$y^{[n]} = h \sum_{i=1}^s b_i f(Y_i) + y^{[n-1]}$



# GLMs für gewöhnliche DGLn. $y' = f(y)$

► Lin. Mehrschritt:  $y_n = h \beta_0 f(y_n) + \sum_{i=1}^k \alpha_i y_{n-i}$

► Runge-Kutta:  $Y_i = h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(Y_j) + y^{[n-1]},$

$y^{[n]} = h \sum_{i=1}^s b_i f(Y_i) + y^{[n-1]}$

► Allg. lin. Verf.:  $Y_i = h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(Y_j) + \sum_{j=1}^r u_{ij} y_j^{[n-1]},$   
 $y_i^{[n]} = h \sum_{j=1}^s b_{ij} f(Y_j) + \sum_{j=1}^r v_{ij} y_j^{[n-1]}$



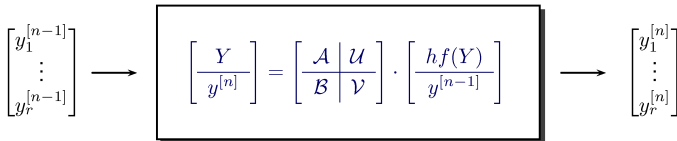
# GLMs für gewöhnliche DGLn. $y' = f(y)$

► Lin. Mehrschritt:  $y_n = h \beta_0 f(y_n) + \sum_{i=1}^k \alpha_i y_{n-i}$

► Runge-Kutta:  $Y_i = h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(Y_j) + y^{[n-1]}$

$y^{[n]} = h \sum_{i=1}^s b_i f(Y_i) + y^{[n-1]}$

► Allg. lin. Verf.:  $Y_i = h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(Y_j) + \sum_{j=1}^r u_{ij} y_j^{[n-1]}$   
 $y_i^{[n]} = h \sum_{j=1}^s b_{ij} f(Y_j) + \sum_{j=1}^r v_{ij} y_j^{[n-1]}$



# Ein Beispielverfahren

$$\left[ \begin{array}{c|c} A & U \\ \hline B & V \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{32} & -\frac{1}{192} \\ \frac{49}{25} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 & -\frac{171}{100} & -\frac{49}{100} & -\frac{43}{600} \\ \frac{123}{1225} & -\frac{225}{392} & \frac{1}{4} & 0 & 1 & \frac{1363}{1400} & \frac{13941}{39200} & \frac{5379}{78400} \\ -\frac{95}{84} & -\frac{59}{84} & \frac{7}{36} & \frac{1}{4} & 1 & \frac{43}{18} & \frac{31}{42} & \frac{37}{336} \\ \hline -\frac{95}{84} & -\frac{59}{84} & \frac{7}{36} & \frac{1}{4} & 1 & \frac{43}{18} & \frac{31}{42} & \frac{37}{336} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{268}{21} & \frac{86}{21} & -\frac{28}{9} & 4 & 0 & \frac{70}{9} & \frac{10}{21} & -\frac{5}{21} \\ -\frac{32}{21} & \frac{88}{21} & -\frac{224}{9} & 16 & 0 & \frac{56}{9} & \frac{20}{21} & -\frac{10}{21} \end{array} \right]$$

(Butcher, 2004)

- ▶ diagonal-implizit
- ▶ Ordnung  $p = 3$  und Stufenordnung  $q = 3$
- ▶ steifgenau, A-stabil, L-stabil
- ▶ Nordsieck-Form,  $y_{i+1}^{[n]} \approx h^i y^{(i)}(t_n)$



# Ein Beispielverfahren

$$\left[ \begin{array}{c|c} A & U \\ \hline B & V \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{32} & -\frac{1}{192} \\ \frac{49}{25} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 & -\frac{171}{100} & -\frac{49}{100} & -\frac{43}{600} \\ \frac{123}{1225} & -\frac{225}{392} & \frac{1}{4} & 0 & 1 & \frac{1363}{1400} & \frac{13941}{39200} & \frac{5379}{78400} \\ -\frac{95}{84} & -\frac{59}{84} & \frac{7}{36} & \frac{1}{4} & 1 & \frac{43}{18} & \frac{31}{42} & \frac{37}{336} \\ \hline -\frac{95}{84} & -\frac{59}{84} & \frac{7}{36} & \frac{1}{4} & 1 & \frac{43}{18} & \frac{31}{42} & \frac{37}{336} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{268}{21} & \frac{86}{21} & -\frac{28}{9} & 4 & 0 & \frac{70}{9} & \frac{10}{21} & -\frac{5}{21} \\ -\frac{32}{21} & \frac{88}{21} & -\frac{224}{9} & 16 & 0 & \frac{56}{9} & \frac{20}{21} & -\frac{10}{21} \end{array} \right]$$

(Butcher, 2004)

- ▶ diagonal-implizit
- ▶ Ordnung  $p = 3$  und Stufenordnung  $q = 3$
- ▶ steifgenau, A-stabil, L-stabil
- ▶ Nordsieck-Form,  $y_{i+1}^{[n]} \approx h^i y^{(i)}(t_n)$

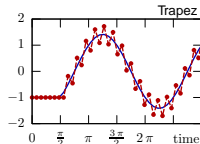
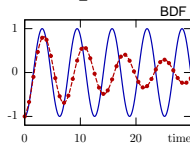
Diagonal-implizite  
Verfahren mit  
hoher Stufenordnung



# Warum allgemeine lineare Verfahren?

$$\begin{bmatrix} Y \\ y^{[n]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & | & \mathcal{U} \\ \mathcal{B} & | & \mathcal{V} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} hf(Y) \\ y^{[n-1]} \end{bmatrix}$$

- ▶ verbesserte Stabilität
  - ▷ Dämpfung wie bei RK Verfahren

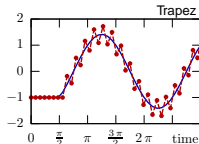
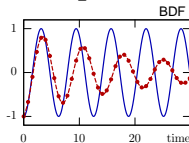


# Warum allgemeine lineare Verfahren?

$$\begin{bmatrix} Y \\ y^{[n]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{U} \\ \mathcal{B} & \mathcal{V} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} hf(Y) \\ y^{[n-1]} \end{bmatrix}$$

► verbesserte Stabilität

- ▷ Dämpfung wie bei RK Verfahren



► verbesserte Effizienz

- ▷ diagonal-implizite Verfahren
- ▷ Stufen  $Y_i$  werden sequentiell bestimmt

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \lambda & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ a_{ij} & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$$

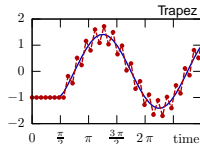
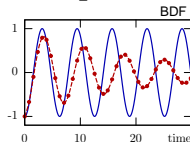


# Warum allgemeine lineare Verfahren?

$$\begin{bmatrix} Y \\ y^{[n]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{U} \\ \mathcal{B} & \mathcal{V} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} hf(Y) \\ y^{[n-1]} \end{bmatrix}$$

## ▶ verbesserte Stabilität

- ▷ Dämpfung wie bei RK Verfahren



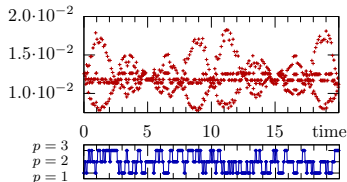
## ▶ verbesserte Effizienz

- ▷ diagonal-implizite Verfahren
- ▷ Stufen  $Y_i$  werden sequentiell bestimmt

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \lambda & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ a_{ij} & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$$

## ▶ hohe Stufenordnung

- ▷ keine Ordnungsreduktion
- ▷ zuverlässige Fehlerschätzer



# GLMs für Index-2 DAEs

$$A \underbrace{(q(x(t), t))}' + b(x(t), t) = 0$$

↑  
singulär

↑  
Ladungen/  
Flüsse

↑  
Potentiale/  
Ströme



# GLMs für Index-2 DAEs

$$A \underbrace{(q(x(t), t))'}_{\substack{\uparrow \\ \text{Ladungen/} \\ \text{Flüsse}}} + \underbrace{b(x(t), t)}_{\substack{\uparrow \\ \text{Potentiale/} \\ \text{Ströme}}} = 0$$

$\uparrow$                        $\uparrow$                        $\uparrow$   
 singulär                      Ladungen/Flüsse                      Potentiale/Ströme

- ▶ Eingangsgrößen (Nordsieck-Form)

$$q_{k+1}^{[n-1]} \approx h^k \frac{d^k}{dt^k} q(x(t), t)$$

- ▶ 
$$\begin{bmatrix} q(X_n, t_c) \\ q^{[n]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & | & \mathcal{U} \\ \mathcal{B} & | & \mathcal{V} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h Q'_n \\ q^{[n-1]} \end{bmatrix}$$

so dass

$$A Q'_n + b(X_n, t_c) = 0$$

- ▶ nach den Stufen  $X_n$  auflösen



# GLMs für Index-2 DAEs

$$A \underbrace{(q(x(t), t))'}_{\substack{\uparrow \\ \text{Ladungen/} \\ \text{Flüsse}}} + \underbrace{b(x(t), t)}_{\substack{\uparrow \\ \text{Potentiale/} \\ \text{Ströme}}} = 0$$

$\uparrow$                        $\uparrow$                        $\uparrow$   
 singulär              Ladungen/Flüsse              Potentiale/Ströme

- ▶ Eingangsgrößen (Nordsieck-Form)

$$q_{k+1}^{[n-1]} \approx h^k \frac{d^k}{dt^k} q(x(t), t)$$

$$\left[ \begin{array}{c} q(X_n, t_c) \\ q^{[n]} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} \mathcal{A} & \mathcal{U} \\ \mathcal{B} & \mathcal{V} \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c} h Q'_n \\ q^{[n-1]} \end{array} \right]$$

so dass

$$A Q'_n + b(X_n, t_c) = 0$$

- ▶ nach den Stufen  $X_n$  auflösen

## Bemerkung

- ▶ implizite Verfahren ( $\mathcal{A}$  regulär)
- ▶ Ladungserhaltung garantiert
- ▶ Ladungen/Flüsse werden von Schritt zu Schritt weitergegeben
- ▶ Analyse nutzt implizites Index-1 System  $y' = f(y, z')$ ,  $z = g(y)$



# GLMs für implizite Index-1 DAEs

Anwendung von  $\mathcal{M} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathcal{A} & \mathcal{U} \\ \hline \mathcal{B} & \mathcal{V} \end{array} \right]$  auf  $y' = f(y, z')$ ,  $z = g(y)$  liefert

$$Y = h \mathcal{A} f(Y, Z') + \mathcal{U} y^{[n]}$$

$$y^{[n+1]} = h \mathcal{B} f(Y, Z') + \mathcal{V} y^{[n]}$$

$$g(Y) = h \mathcal{A} Z' + \mathcal{U} z^{[n]}$$

$$z^{[n+1]} = h \mathcal{B} Z' + \mathcal{V} z^{[n]}$$



# GLMs für implizite Index-1 DAEs

Anwendung von  $\mathcal{M} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathcal{A} & \mathcal{U} \\ \hline \mathcal{B} & \mathcal{V} \end{array} \right]$  auf  $y' = f(y, z')$ ,  $z = g(y)$  liefert

$$\begin{aligned} Y &= h \mathcal{A} f(Y, Z') + \mathcal{U} y^{[n]} & g(Y) &= h \mathcal{A} Z' + \mathcal{U} z^{[n]} \\ y^{[n+1]} &= h \mathcal{B} f(Y, Z') + \mathcal{V} y^{[n]} & z^{[n+1]} &= h \mathcal{B} Z' + \mathcal{V} z^{[n]} \end{aligned}$$

## Idee:

- numerische/exakte Größen sind (verallgemeinerte) B-Reihen

$$\begin{aligned} Y &= B(\mathbf{v}; y(t_n), z(t_n)), & hZ' &= B(\mathbf{k}; y(t_n), z(t_n)), \\ y^{[1]} &= B(\mathbf{u}; y(t_n), z(t_n)), & z^{[1]} &= B(\mathbf{v}; y(t_n), z(t_n)) \\ \hat{y}^{[1]} &= B(\mathbf{E}; y(t_n), z(t_n)), & \hat{z}^{[1]} &= B(\mathbf{E}; y(t_n), z(t_n)) \end{aligned}$$

- Taylor-Reihenentwicklung bzgl. Baumstrukturen

$$T = \left\{ \emptyset, \bullet, \bullet\bullet, \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ | \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ | \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \\ | \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array}, \dots \right\}$$

# GLMs für implizite Index-1 DAEs

Anwendung von  $\mathcal{M} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathcal{A} & \mathcal{U} \\ \hline \mathcal{B} & \mathcal{V} \end{array} \right]$  auf  $y' = f(y, z')$ ,  $z = g(y)$  liefert

$$\begin{aligned} Y &= h \mathcal{A} f(Y, Z') + \mathcal{U} y^{[n]} & g(Y) &= h \mathcal{A} Z' + \mathcal{U} z^{[n]} \\ y^{[n+1]} &= h \mathcal{B} f(Y, Z') + \mathcal{V} y^{[n]} & z^{[n+1]} &= h \mathcal{B} Z' + \mathcal{V} z^{[n]} \end{aligned}$$

## Idee:

- numerische/exakte Größen sind (verallgemeinerte) B-Reihen

$$\begin{aligned} Y &= B(\mathbf{v}; y(t_n), z(t_n)), & hZ' &= B(\mathbf{k}; y(t_n), z(t_n)), \\ y^{[1]} &= B(\mathbf{u}; y(t_n), z(t_n)), & z^{[1]} &= B(\mathbf{v}; y(t_n), z(t_n)), \\ \hat{y}^{[1]} &= B(\mathbf{E}; y(t_n), z(t_n)), & \hat{z}^{[1]} &= B(\mathbf{E}; y(t_n), z(t_n)) \end{aligned}$$

- Taylor-Reihenentwicklung bzgl. Baumstrukturen

$$T = \left\{ \emptyset, \bullet, \bullet\bullet, \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ | \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ | \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \\ | \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array}, \dots \right\}$$

# GLMs für implizite Index-1 DAEs

**Satz.** Es sei  $\mathcal{M} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathcal{A} & u_1 \cdots u_r \\ \mathcal{B} & v_1 \cdots v_r \end{array} \right]$  ein GLM in Nordsieck-Form.

- ▶ für implizite Index-1 DAEs

$$\text{Ordnung } p \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{u}(\tau) = \mathbf{E}(\tau) \quad \forall \tau \in T \text{ mit } |\tau| \leq p.$$

# GLMs für implizite Index-1 DAEs

**Satz.** Es sei  $\mathcal{M} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathcal{A} & u_1 \cdots u_r \\ \mathcal{B} & v_1 \cdots v_r \end{array} \right]$  ein GLM in Nordsieck-Form.

► für implizite Index-1 DAEs

Ordnung  $p \Leftrightarrow \mathbf{u}(\tau) = \mathbf{E}(\tau) \quad \forall \tau \in T \text{ mit } |\tau| \leq p.$

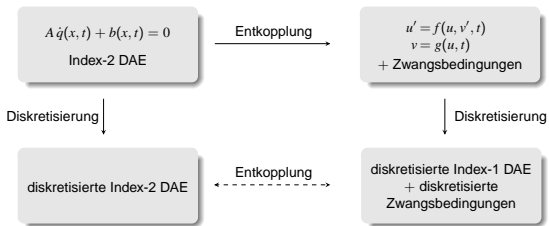
Ordnungsbedingungen für  $p \leq 3$

| order 1 |  |
|---------|--|
| •       | $\mathcal{B}e + v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$                             |
| order 2 |  |
| ⋮       | $\mathcal{B}c + v_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$                 |
|         | $\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}(c^2 - 2u_3) + 2v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$ |

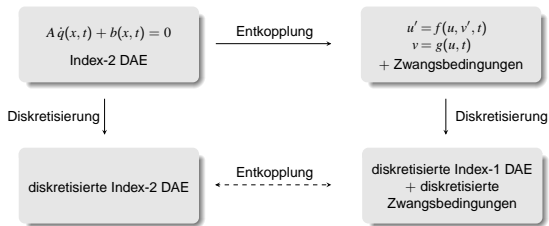
| order 3 |   |
|---------|---|
|         | $\mathcal{B}c^2 + 2v_4 = \frac{1}{3}$   |
|         | $\mathcal{B}(\mathcal{A}c + u_3) + v_4 = \frac{1}{6}$                           |
|         | $\mathcal{B}c\mathcal{A}^{-1}(c^2 - 2u_3) + 4v_4 = \frac{2}{3}$                 |
|         | $\mathcal{B}(\mathcal{A}^{-1}(c^2 - 2u_3))^2 + 8v_4 = \frac{4}{3}$              |
|         | $\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}(c^3 - 6u_4) + 6v_4 = 1$                            |
|         | $\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}(c\mathcal{A}c + cu_3 - 3u_4) + 3v_4 = \frac{1}{2}$ |

$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ \vdots \end{pmatrix}$

# GLMs für Index-2 DAEs



# GLMs für Index-2 DAEs

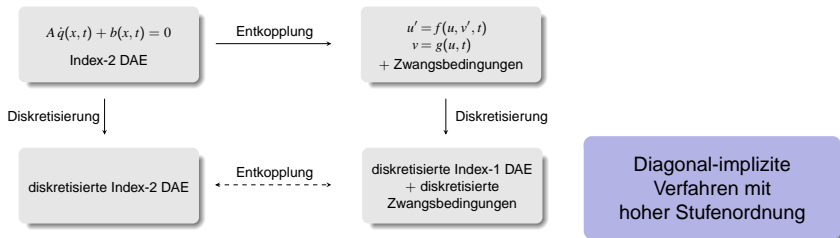


**Satz.** Es sei  $\mathcal{M} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathcal{A} & \mathcal{U} \\ \mathcal{B} & \mathcal{V} \end{array} \right]$  ein GLM in Nordsieck-Form, so dass

- ▶ Ordnung  $p$  für implizite Index-1 DAEs
- ▶  $\mathcal{V}$  stabil und  $M_\infty = \mathcal{V} - \mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}$  nilpotent
- ▶ steifgenau, Stufenordnung  $q$ .

$\mathcal{M}$  konvergiert mit Ordnung  $\min(p, q)$  für  $A \dot{q}(x, t) + b(x, t) = 0$  (Index-2)

# GLMs für Index-2 DAEs



**Satz.** Es sei  $\mathcal{M} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathcal{A} & \mathcal{U} \\ \hline \mathcal{B} & \mathcal{V} \end{array} \right]$  ein GLM in Nordsieck-Form, so dass

- ▶ Ordnung  $p$  für implizite Index-1 DAEs
- ▶  $\mathcal{V}$  stabil und  $M_\infty = \mathcal{V} - \mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}$  nilpotent
- ▶ steifgenau, Stufenordnung  $q$ .

$\mathcal{M}$  konvergiert mit Ordnung  $\min(p, q)$  für  $A \dot{q}(x, t) + b(x, t) = 0$  (Index-2)

# Contents

Algebro-Differentialgleichungen

Allgemeine lineare Verfahren

**Praxis allgemeiner linearer Verfahren**



# Ein Verfahren mit Ordnung 2

Konstruktion eines Verfahrens mit der Struktur

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ y_1^{[n]} \\ y_2^{[n]} \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & u_{11} & u_{12} \\ a_{21} & a_{22} & u_{21} & u_{22} \\ \hline b_{11} & b_{12} & v_{11} & v_{12} \\ b_{21} & b_{22} & v_{21} & v_{22} \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} hf(Y_1) \\ hf(Y_2) \\ y_1^{[n-1]} \\ y_2^{[n-1]} \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

1.  $A$  diagonal-implizit
2. Ordnung 2 für impl. Index-1
3. Stufenordnung 2
4.  $A$ -Stabilität
5.  $L$ -Stabilität
6. Stabilität bei 0 ( $\mathcal{V}$  stabil)
7.  $M_\infty = \mathcal{V} - \mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}$  nilpotent
8. steifgenau



# Ein Verfahren mit Ordnung 2

Konstruktion eines Verfahrens mit der Struktur

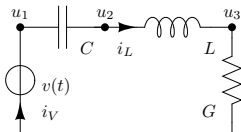
$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ y_1^{[n]} \\ y_2^{[n]} \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cc|cc} \frac{2\lambda-1}{2(\lambda-1)} & 0 & 1 & \frac{2\lambda-1}{2(\lambda-1)} \\ \frac{1-\lambda}{2} & \lambda & 1 & \frac{1-\lambda}{2} \\ \hline \frac{1-\lambda}{2} & \lambda & 1 & \frac{1-\lambda}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} hf(Y_1) \\ hf(Y_2) \\ y_1^{[n-1]} \\ y_2^{[n-1]} \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 2\lambda \\ 1 \end{bmatrix}$$

1.  $A$  diagonal-implizit
2. Ordnung 2 für impl. Index-1
3. Stufenordnung 2
4.  $A$ -Stabilität
5.  $L$ -Stabilität
6. Stabilität bei 0 ( $\mathcal{V}$  stabil)
7.  $M_\infty = \mathcal{V} - \mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{U}$  nilpotent
8. steifgenau



# Steuerung des Dämpfungsverhaltens

$$\mathcal{M} = \left[ \begin{array}{cc|cc} \frac{2\lambda-1}{2(\lambda-1)} & 0 & 1 & \frac{2\lambda-1}{2(\lambda-1)} \\ \frac{1-\lambda}{2} & \lambda & 1 & \frac{1-\lambda}{2} \\ \hline \frac{1-\lambda}{2} & \lambda & 1 & \frac{1-\lambda}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right],$$



- ▶ Oszillator
- ▶ großer Leitwert  
⇒ keine Dämpfung
- ▶ konstantes  $h = \frac{\pi}{2}$

# GLIMDA – Allgemeine lineare Verf. für DAEs

General Linear Methods for Differential Algebraic equations

- ▶ numerische Lösung von DAEs  $f(\dot{q}(x, t), x, t) = 0$
- ▶ variable Schrittweite und variable Ordnung  $1 \leq p \leq 3$



# GLIMDA – Allgemeine lineare Verf. für DAEs

**G**eneral **L**inear **M**ethods for **D**ifferential **A**lgebraic equations

- ▶ numerische Lösung von DAEs  $f(\dot{q}(x, t), x, t) = 0$
- ▶ variable Schrittweite und variable Ordnung  $1 \leq p \leq 3$

## Ordnungssteuerung

- ▶ Konvergenzrate des Newton-Verfahrens  
Hairer, Wanner *Stiff differential equations solved by Runge-Kutta methods* (1999)



# GLIMDA – Allgemeine lineare Verf. für DAEs

## General Linear Methods for Differential Algebraic equations

- ▶ numerische Lösung von DAEs  $f(\dot{q}(x, t), x, t) = 0$
- ▶ variable Schrittweite und variable Ordnung  $1 \leq p \leq 3$

## Ordnungssteuerung

- ▶ Konvergenzrate des Newton-Verfahrens  
Hairer, Wanner *Stiff differential equations solved by Runge-Kutta methods* (1999)

## Schrittweitensteuerung

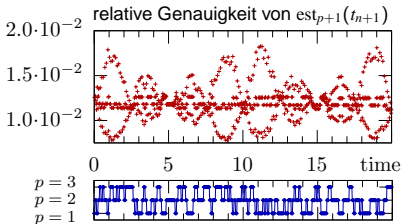
- ▶ Linearkombination

$$\begin{aligned} \text{est}_{p+1}(t_{n+1}) \\ = \delta_0 q_2^{[n]} + \delta_1 h Q'_1 + \dots + \delta_s h Q'_s \end{aligned}$$

- ▶ **Test:**  $x' = -\frac{1}{10}(x - e^{it}) + i e^{it}$

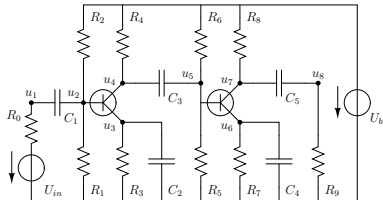
zufällige Ordnung und oszillierende Schrittweite  $h_{n+1} = \varrho(n) h_n$

Butcher, Podhaisky *On error estimation in general linear methods for stiff ODEs* (2006)



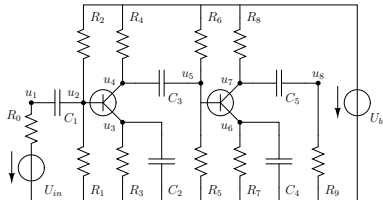
# Transistor-Verstärker (Index-1)

- ▶ 8 Gleichungen
- ▶ Standard Testproblem
- ▶ Verstärkung mittels zweier Transistoren
- ▶  $\text{rtol} = 10^{-j/2}$ ,  $j = 0, \dots, 8$ ,  
und  $\text{atol} = 10^{-6} \cdot \text{rtol}$

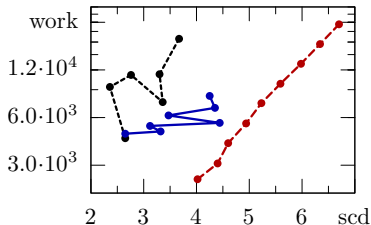


# Transistor-Verstärker (Index-1)

- ▶ 8 Gleichungen
- ▶ Standard Testproblem
- ▶ Verstärkung mittels zweier Transistoren
- ▶  $\text{rtol} = 10^{-j/2}$ ,  $j = 0, \dots, 8$ ,  
und  $\text{atol} = 10^{-6} \cdot \text{rtol}$



- ▶  $\text{work} = \# \text{ f-eval} + \# \text{ j-eval}$
- ▶ höhere Genauigkeit bei geringerem Aufwand
- ▶ fast linearer Zusammenhang (im loglog-Bild)

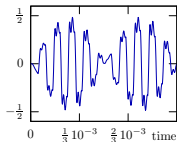


**DASSL**   **RADAU**   **GLIMDA**



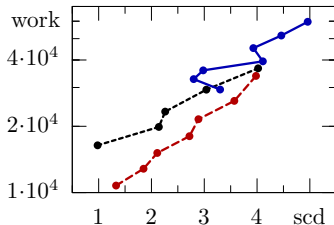
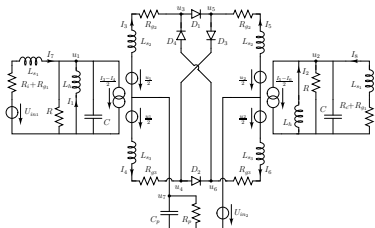
# Ringmodulator (Index-2)

- ▶ 15 Gleichungen
- ▶ niederfrequentes Signal  $U_{in1}$  wird mit hochfrequentem Signal  $U_{in2}$  gemixt



Ausgangs-  
signal  $u_2$

- ▶  $rtol = 10^{-j/2}$ ,  $j = 4, 5, \dots, 10$   
und  $atol = 10^{-2} \cdot rtol$



**DASSL RADAU GLIMDA**



# Zusammenfassung

## Allg. lineare Verfahren für den Entwurf integrierter Schaltungen



# Zusammenfassung

## Allg. lineare Verfahren für den Entwurf integrierter Schaltungen

### ▶ Analyse von DAEs

$$A \dot{q}(x, t) + b(x, t) = 0$$

- ▶ Entkopplungsprozedur
- ▶ Ausnutzung spez. Strukturen der Schaltungs-DAEs
- ▶ implizites Index-1 System

### ▶ Analyse von GLMs

- ▶ Ordnungsbedingungen für implizite Index-1 DAEs
- ▶ Konvergenz via Entkopplungsprozedur
- ▶ Konstruktion neuartiger Verfahren



# Zusammenfassung

## Allg. lineare Verfahren für den Entwurf integrierter Schaltungen

### ▶ Analyse von DAEs

$$A \dot{q}(x, t) + b(x, t) = 0$$

- ▷ Entkopplungsprozedur
- ▷ Ausnutzung spez. Strukturen der Schaltungs-DAEs
- ▷ implizites Index-1 System

### ▶ Analyse von GLMs

- ▷ Ordnungsbedingungen für implizite Index-1 DAEs
- ▷ Konvergenz via Entkopplungsprozedur
- ▷ Konstruktion neuartiger Verfahren

- ▶ Effizienz durch diagonal-implizite Struktur
- ▶ Vorteile der hohen Stufenordnung
  - ▷ keine Ordnungsreduktion
  - ▷ einfache Interpolation an Zwischenstellen
  - ▷ sehr genaue Fehlerschätzer
- ▶ zuverlässige und robuste Lösung von DAEs mit proper formuliertem Hauptterm

