Serie 7, Aufgabe 5**

Sei $G = (E, K)$ ein endlicher zusammenhängender (ungerichteter) Graph und sei $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Numerierung der Ecken. Zu einem solchen Graphen definieren die Matrix $A_G = (\alpha_{k,j})_{1 \leq k,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ mit

$$\alpha_{k,j} = \begin{cases} 2 & : k = j \\ -1 & : k \neq j, \{e_k, e_j\} \in K \\ 0 & : \text{ sonst} \end{cases}$$

Diese Matrix ist symmetrisch. Sie definiert also eine symmetrische Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $\mathbb{R}^n$ vermöge der Definition $\langle x, y \rangle := x^t A_G y$. Es fragt sich unter welchen Umständen dies sogar ein Skalarprodukt ist, d.h. wann A_G positiv definit ist. Zunächst eine Beobachtung. Die Antwort auf diese Frage hängt offenbar nicht von der Numerierung $e_1, \ldots, e_n$ der Ecken ab. Denn ist $\sigma \in S_n$ eine Permutation und $S = \begin{pmatrix} e_{\sigma(1)} & \ldots & e_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$ die Matrix die aus der Identitätsmatrix durch Permutation der Spaltenvektoren entsteht, so ist die Matrix $\tilde{A}_G$ bzgl. der Numerierung $e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}$ gegeben durch $\tilde{A}_G = S^t AS$ wie man sich leicht überlegt. Es gilt für $x \in \mathbb{R}^n$

$$x^t \tilde{A}_G x = x^t S^t ASx = (Sx)^t A(Sx)$$

und da $S \in GL_n(\mathbb{R})$ folglich

$$\exists x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 \ : x^t \tilde{A}_G x = 0 \leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 \ : x^t A_G x = 0$$

Betrachte wir nun für bel. $x \in \mathbb{R}^n$ den Wert von $x^t A_G x$

$$x^t A_G x = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} x_j \right) = 2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2 \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ \{e_i, e_j\} \in K}} x_i x_j$$

Wie wir nun sehen werden muß G schon kreisfrei sein (und da G zusammenhängend somit ein Baum), wenn obiger Ausdruck für alle $x \neq 0$ positiv sein soll. Ist nämlich $e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}, e_{j_1}$ ein Kreis ($j_l \neq j_m$ für $l \neq m$ und $k \geq 2$), so ist aufgrund der vorangegangen Beobachtung o.B.d.A. $j_1 = 1, j_2 = 2, \ldots, j_k = k$. Setzt man nun speziell $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0, x_1 = \ldots = x_k = 1, x_{k+1} = \ldots x_n = 0$, so gilt

$$x^t A_G x = 2 \left(\underbrace{x_1^2 + \ldots + x_k^2}_{k} - \left(\underbrace{x_1 x_2 + \ldots + x_{k-1} x_k + x_1 x_k}_{k} + \underbrace{\ldots}_{\geq 0} \right) \right) \leq 2(k-k) = 0$$

Nach einem Satz aus der Graphentheorie besitzt ein Baum mit n Ecken genau $n-1$ Kanten. Wir können nun weiter einschränken. Es können auch keine Graphen mit Ecken vom Grad ≥ 4 auftreten. Denn falls es eine solche Ecke mit Grad $k \geq 4$ gibt, dann ist dies o.B.d.A. e_1 und es gilt $\{e_1, e_2\}, \{e_1, e_3\}, \ldots, \{e_1, e_{k+1}\} \in K$. Setzt man nun $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0, x_1 = 1, x_2 = \ldots = x_{k+1} = \frac{1}{2}, x_{k+2} = \ldots = x_n = 0$ so ergibt

$$\begin{aligned} x^t A_G x &= 2 \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{k+1}^2 - x_1 x_2 - \ldots - x_1 x_{k+1} - \underbrace{\ldots}_{\geq 0} \right) \\ &\leq (x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + \ldots + (x_1 - x_{k+1})^2 + x_2^2 + \ldots + x_{k+1}^2 + (2-k) x_1^2 \\ &= \frac{k}{4} x_1^2 + \frac{k}{4} x_1^2 + (2-k) x_1^2 = (2 - \frac{k}{2}) x_1^2 = 2 - \frac{k}{2} \leq 0 \end{aligned}$$

Dies können wir noch weiter einschränken. Es kann nämlich von Ecken mit Grad 3 höchstens eine im Graphen G existieren wenn A_G positiv definit ist. Denn seien nun e_1, e_2 Ecken vom Grad 3. Wir unterscheiden zunächst die Fälle $\{e_1, e_2\} \in K \vee \{e_1, e_2\} \notin K$. Im ersten Fall können e_1, e_2 keine gemeinsamen

Nachbarn haben, da sonst ein Kreis im Graph enthalten wäre. Also ist o.B.d.A. $\{e_1, e_3\}, \{e_1, 4\} \in K$ und $\{e_2, e_5\}, \{e_2, e_6\} \in K$. Setzt man nun $x_i = 0$ für $i > 6$ und lässt $x_1, \ldots, x_6$ zunächst noch beliebig, so folgt mit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} x^t A_G x &= 2\left(x_1^2 + \ldots x_6^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 - \underbrace{\ldots}_{\geq 0}\right) \\ &\leq 2\left(x_1^2 + \ldots x_6^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_2x_5 - x_2x_6\right) \end{aligned}$$

Der untere Ausdruck ist gerade die zur Matrix $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ gehörende quadratische Form. Wie man sich leicht überzeugt ist diese Matrix nicht regulär, und damit die dazugehörige quadratische Form nicht positiv definit. Insbesondere ist dann A_G nicht positiv definit.

Nun der Fall $\{e_1, e_2\} \notin K$. Da G zusammenhängend ist gibt es einen Weg $e_1, e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}, e_2$. Nun gibt es die Möglichkeit $k = 1 \vee k > 1$, also die Möglichkeit daß e_{i_1} gemeinsamer Nachbar von e_1, e_2 ist und der Fall daß nicht. Im ersten Fall ist o.B.d.A. $\{e_1, e_3\}, \{e_1, e_4\}, \{e_1, e_5\} \in K$ und $\{e_2, e_3\}, \{e_2, e_6\}, \{e_2, e_7\} \in K$. Setzt man nun $x_i = 0$ für $i > 7$ und lässt $x_1, \ldots, x_7$ zunächst noch beliebig, so folgt mit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} x^t A_G x &= 2\left(x_1^2 + \ldots x_7^2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_1x_5 - x_2x_3 - x_2x_6 - x_2x_7 \underbrace{\ldots}_{\geq 0}\right) \\ &\leq 2\left(x_1^2 + \ldots x_7^2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_1x_5 - x_2x_3 - x_2x_6 - x_2x_7\right) \end{aligned}$$

Der untere Ausdruck ist gerade die zur Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ gehörende quadratische Form. Wie man sich leicht überzeugt ist diese Matrix nicht regulär, und damit die dazugehörige quadratische Form nicht positiv definit. Insbesondere ist dann A_G nicht positiv definit.

Nun der zweite Fall. O.B.d.A. gilt also $\{e_1, e_3\}, \{e_1, e_4\}, \{e_1, e_5\} \in K$, $\{e_2, e_6\}, \{e_2, e_7\}, \{e_2, e_8\} \in K$ und es existiert der Weg $e_1, e_5, e_{8+1}, \ldots, e_{8+k}, e_6, e_2$ also $\{e_5, e_{8+1}\}, \{e_{8+1}, e_{8+2}\}, \ldots, \{e_{8+k-1}, e_{8+k}\}, \{e_6, e_{8+k}\} \in K$. Setzt man nun $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $2 = x_1 = x_2 = x_5 = x_6 = x_{8+1} = \ldots = x_{8+k}, 1 = x_3 = x_4 = x_7 = x_8$ und $x_i = 0$ für $i > 8 + k$, so gilt

$$\begin{aligned} x^t A_G x &= 2(x_1^2 + \ldots + x_{8+k}^2 - (x_1x_3 + x_1x_4 + x_1x_5 + x_2x_6 + x_2x_7 + x_2x_8 + x_5x_{8+1} \\ &\quad + x_{8+1}x_{8+2} + \ldots + x_{8+k-1}x_{8+k} + x_6x_{8+k} + \underbrace{\ldots}_{\geq 0})) \\ &\leq (x_1 - x_3)^2 + (x_1 - x_4)^2 + (x_1 - x_5)^2 + (x_2 - x_6)^2 + (x_2 - x_7)^2 + (x_2 - x_8)^2 + (x_5 - x_{8+1})^2 \\ &\quad + (x_{8+1} - x_{8+2})^2 + \ldots + (x_{8+k-1} - x_{8+k})^2 + (x_{8+k} - x_6)^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_7^2 + x_8^2 + (2-3)x_1^2 + (2-3)x_2^2 \\ &= 2 \cdot \frac{1}{4}x_1^2 + 2 \cdot \frac{1}{4}x_2^2 + 2 \cdot \frac{1}{4}x_1^2 + 2 \cdot \frac{1}{4}x_2^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0 \end{aligned}$$

Damit bleibt für den Graphen G nur noch die Möglichkeit daß G nur Ecken vom Grad ≤ 2 besitzt oder daß G genau eine Ecke mit Grad 3 besitzt und sonst nur Ecken vom Grad 2. Falls G nur Ecken mit Grad ≤ 2 besitzt, so ist G linear. Für diese Klasse von Graphen wurde in Aufgabe 1 nachgewiesen daß A_G positiv definit ist. Für die andere Klasse müssen wir jedoch noch eine Einschränkung vornehmen. Betrachten wir also den Fall daß G ein Baum ist, eine Ecke vom Grad 3 besitzt und sonst nur Ecken vom Grad ≤ 2.

O.B.d.A. ist e_1 die Ecke des Graphen mit Grad 3 und $\{e_1, e_2\}, \{e_2, e_{2+1}\}, \{e_{2+1}, e_{2+2}\}, \ldots, \{e_{2+k-1}, e_{2+k}\} \in K$, $\{e_1, e_{3+k}\}, \{e_{3+k}, e_{3+k+1}\}, \ldots, \{e_{3+k+m-1}, e_{3+k+m}\} \in K$, $\{e_1, e_{4+k+m}\}, \{e_{4+k+m}, e_{4+k+m+1}\}, \ldots, \{e_{n-1}, e_n\} \in K$ wobei $k, m \geq 0$. Für geg. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ist dann

$$\begin{aligned}
x^t A_G x &= 2(x_1^2 + \ldots + x_n^2 - (x_1x_2 + x_2x_{2+1} + \ldots + x_{2+k-1}x_{2+k} + x_1x_{3+k} + x_{3+k}x_{3+k+1} + \ldots \\
&\quad + x_{3+k+m-1}x_{3+k+m} + x_1x_{4+k+m} + x_{4+k+m}x_{4+k+m+1} + \ldots + x_{n-1}x_n)) \\
&= (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_{2+1})^2 + \ldots + (x_{2+k-1} - x_{2+k})^2 + (x_1 - x_{3+k})^2 + (x_{3+k} - x_{3+k+1})^2 \\
&\quad + \ldots + (x_{3+k+m-1} - x_{3+k+m})^2 + (x_1 - x_{4+k+m})^2 + (x_{4+k+m} - x_{4+k+m+1})^2 + \ldots + (x_{n-1} - x_n)^2 \\
&\quad - x_1^2 + x_{2+k}^2 + x_{3+k+m}^2 + x_n^2
\end{aligned}$$

Wenn wir nun speziell den Fall $k, m \geq 1 \wedge n \geq 5 + k + m$ voraussetzen und $x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $x_1 = 3, x_2 = \ldots = x_{2+k-1} = 2, x_{3+k} = \ldots = x_{3+k+m-1} = 2, x_{4+k+m} = \ldots = x_{n-1} = 2, x_{2+k} = x_{3+k+m} = x_n = 1$ setzen, so sehen wir

$$\begin{aligned}
x^t A_G x &= (x_1 - x_2)^2 + (x_{2+k-1} - x_{2+k})^2 + (x_1 - x_{3+k})^2 + (x_{3+k+m-1} - x_{3+k+m})^2 \\
&\quad + (x_1 - x_{4+k+m})^2 + (x_{n-1} - x_n)^2 - x_1^2 + x_{2+k}^2 + x_{3+k+m}^2 + x_n^2 \\
&= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 - 9 + 1 + 1 + 1 = 0
\end{aligned}$$

Also ist A_G nicht positiv definit wenn die mit e_1 verbundenen linearen Subgraphen sämtlich länger als 1 sind. Daß einer dieser linearen Subgraphen die Länge 1 besitzt, besagt gerade daß der Graph durch Hinzufügen genau einer Ecke und einer Kante aus an einen linearen Graphen hervorgeht (wobei die Ecke an der angefügt wird keiner der beiden Eckpunkte des linearen Graphen ist, da der resultierende Graph dann wieder linear wäre). Diese Einschränkung ist immer noch nicht ganz ausreichend. Wir werden gleich sehen daß von dieser Klasse (fast) nur endlich viele übrig bleiben werden. Doch um zu diesem Ergebnis zu gelangen müssen wir noch ein paar Berechnungen anstellen. Sei also G ein Graph von besagter Gestalt. Nach der Bemerkung über die Unabhängigkeit der Frage der positiven Definitheit von A_G von der Numerierung der Ecken des Graphen können wir o.E. annehmen daß $|E| = n + 1, n \geq 3$ und G durch Anfügen von e_{n+1} an die Ecke $e_i, 1 < i < n$ (des linearen Subgraphen $\{e_1, \ldots, e_n\}$) entsteht. Dann besitzt also A_G folgende Gestalt:

$$\begin{pmatrix}
2 & -1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\
-1 & 2 & -1 & & & & & \vdots & 0 \\
0 & & \ddots & & & & & \vdots & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & & & & \vdots & 0 \\
\vdots & & & -1 & 2 & -1 & & \vdots & -1 \\
\vdots & & & & & \ddots & & \vdots & 0 \\
\vdots & & & & & & \ddots & -1 & \vdots \\
0 & & & & & & -1 & 2 & 0 \\
0 & \ldots & \ldots & 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 2
\end{pmatrix}$$

Wir erkennen daß die linke obere $n \times n$-Teilmatrix die zum linearen Graphen mit n Ecken gehörige Gram-Matrix ist. Nach Aufgabe 1 ist diese positive definit, erfüllt somit das Hauptminorenkriterium für positive Definitheit (vgl. Aufgabe 4*). Somit gilt $\det(A_G^{(m)}) > 0, m = 1, \ldots, n$, wobei $A_G^{(m)}$ hier einmal die linke obere $m \times m$-Teilmatrix von A_G bezeichnen möge. Also ist A_G genau dann positiv definit wenn auch $\det(A_G) > 0$ ist. Wir müssen also $\det(A_G)$ berechnen. Dies bewerkstelligen wir mithilfe von elementaren Zeilenoperationen.

Wir lassen die letzte Zeile der Matrix zunächst außen vor. Im ersten Schritt eliminieren wir die Elemente auf der unteren Nebendiagonalen. Wir deuten dies schematisch an: Im ersten Teilschritt wird das $\frac{1}{2}$-fache der ersten Zeile zur zweiten addiert. Wir erhalten dann

$$\begin{pmatrix}
2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\
0 & \frac{3}{2} & -1 & & & & & \vdots & 0 \\
0 & & \ddots & & & & & \vdots & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & & & & \vdots & 0 \\
\vdots & & & -1 & 2 & -1 & & \vdots & -1 \\
\vdots & & & & & \ddots & & \vdots & 0 \\
\vdots & & & & & & \ddots & -1 & \vdots \\
0 & & & & & & -1 & 2 & 0 \\
0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 2
\end{pmatrix}$$

Dementsprechend wird im zweiten Teilschritt das $\frac{2}{3}$-fache der zweiten Zeile zur dritten addiert, usw. Führen wir diesen Prozeß für die ersten n Zeilen durch, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix}
2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\
0 & \frac{3}{2} & -1 & & & & & \vdots & 0 \\
0 & & \ddots & & & & & \vdots & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & & & & \vdots & 0 \\
\vdots & & & 0 & \frac{i+1}{i} & -1 & & \vdots & -\frac{i}{i} \\
\vdots & & & & & \ddots & & \vdots & -\frac{i}{i+1} \\
\vdots & & & & & & \ddots & -1 & \vdots \\
0 & & & & & & 0 & \frac{n+1}{n} & -\frac{i}{n} \\
0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 2
\end{pmatrix}$$

Der Leser möge verzeihen daß aufgrund der Unhandlichkeit der Matrizen die Ausführung der Schritte etwas spärlich ausfallen muss. Im zweiten Schritt wird die obere Nebendiagonale von der i-ten bis zur n-ten Zeile annuliert. Dies dient zur Vorbereitung des dritten Schrittes, in welchem die störende -1 in der $(n+1)$-ten Zeile und i-ten Spalte annuliert wird.

Im ersten Teilschritt addieren wie das $\frac{n}{n+1}$-fache der n-ten Zeile zur $(n-1)$-ten Zeile, im zweiten Teilschritt das $\frac{n-1}{n}$-fache der $(n-1)$-ten Zeile zur $(n-2)$-ten Zeile usw. Dabei müssen wir darauf achten wie sich die Einträge in der $(n+1)$-ten Spalte ändern. Nach dem ersten Teilschritt steht dort in der $(n-1)$-ten Zeile $-\frac{i}{n-1} - \frac{n}{n+1}\frac{i}{n} = -i(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1})$. Nach dem zweiten Teilschritt steht dort in der $(n-2)$-ten Zeile $-\frac{i}{n-2} - \frac{n-1}{n} i(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1}) = -i(\frac{1}{n-2} + \frac{n-1}{n}\frac{2n}{(n-1)(n+1)}) = -i(\frac{1}{n-2} + \frac{2}{n+1})$. Allgemein steht in der $(n-k)$-ten Zeile $(k = 1, \dots, n-i)$ und $n+1$-ten Spalte der Eintrag $-i(\frac{1}{n-k} + \frac{k}{n+1})$. Dies ergibt sich leicht durch Induktion und der Identität $-i\frac{i}{n-(k+1)} - \frac{n-k}{n-(k-1)} i(\frac{1}{n-k} + \frac{k}{n+1}) = -i(\frac{1}{n-(k+1)} + \frac{n-k}{n-(k-1)}\frac{n+1+k(n-k)}{(n-k)(n+1)}) = -i(\frac{1}{n-(k+1)} + \frac{n-k}{n-(k-1)}\frac{(k+1)\cdot(n-(k-1))}{(n-k)(n+1)}) = -i(\frac{1}{n-(k+1)} + \frac{k+1}{n+1})$.

Nach $(n-i)$-maliger Iteration erhalten wir

$$\begin{pmatrix}
2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\
0 & \frac{3}{2} & -1 & & & & & \vdots & 0 \\
0 & & \ddots & & & & & \vdots & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & & & & \vdots & 0 \\
\vdots & & & 0 & \frac{i+1}{i} & 0 & & \vdots & -i(\frac{1}{i} + \frac{n-i}{n+1}) \\
\vdots & & & & & \ddots & & \vdots & -i(\frac{1}{i+1} + \frac{n-i-1}{n+1}) \\
\vdots & & & & & & \ddots & 0 & \vdots \\
0 & & & & & & 0 & \frac{n+1}{n} & -\frac{i}{n} \\
0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 2
\end{pmatrix}$$

Im dritten und letzten Schritt addieren wir das $\frac{i}{i+1}$-fache der i-ten Zeile zur $(n+1)$-Zeile und erhalt die Dreiecksmatrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & & & & & \vdots & 0 \\ 0 & & \ddots & & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & & & \vdots & 0 \\ \vdots & & & 0 & \frac{i+1}{i} & 0 & & \vdots & -i(\frac{1}{i}+\frac{n-i}{n+1}) \\ \vdots & & & & & \ddots & & \vdots & -i(\frac{1}{i+1}+\frac{n-i-1}{n+1}) \\ \vdots & & & & & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & & & & & 0 & \frac{n+1}{n} & -\frac{i}{n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2-\frac{i^2}{i+1}(\frac{1}{i}+\frac{n-i}{n+1}) \end{pmatrix}$$

Die Determinante ist nun einfach das Produkt der Diagonalelemente. Uns interessiert jedoch nur der $(n+1)$-te Faktor $2-\frac{i^2}{i+1}(\frac{1}{i}+\frac{n-i}{n+1})$ da dieser das Vorzeichen von $\det(A_G)$ bestimmt.

Um unsere Betrachtung also zum Abschluß bringen zu können müssen wir klären wann $2-\frac{i^2}{i+1}(\frac{1}{i}+\frac{n-i}{n+1}) > 0$ bzw. $2-\frac{i^2}{i+1}(\frac{1}{i}+\frac{n-i}{n+1}) \leq 0$ gilt. Zunächst vereinfachen wir den Ausdruck $\frac{i^2}{i+1}(\frac{1}{i}+\frac{n-i}{n+1})$

$$\frac{i^2}{i+1}\left(\frac{1}{i}+\frac{n-i}{n+1}\right) = \frac{i^2}{i+1}\frac{n+1+in-i^2}{i(n+1)} = i\frac{(n+1-i)(i+1)}{(i+1)(n+1)} = i\frac{n+1-i}{n+1} = -\frac{i^2}{n+1}+i$$

Also ist A_G positiv definit gdw. $2 > -\frac{i^2}{n+1}+i$. Die Funktion $f(x) = -\frac{x^2}{n+1}+x$ ist eine nach unten geöffnete Parabel und ihr Maximum wird an der Stelle $x = \frac{n+1}{2} \in [2; n-1]$ [1] angenommen und es ist $f\left(\frac{n+1}{2}-x\right) = f\left(\frac{n+1}{2}+x\right)$. Da also f streng konkav ist, wird das Minimum von $f|_{[2;n-1]}$ - welches gleich $\min_{i=2,\dots,n-1} f(i)$ ist - an einem der Randpunkte $2, n-1$ angenommen. Es ist $f(n+1) = f(2) = -\frac{4}{n+1}+2 < 2$ für alle $n \geq 3$. Also ist für die (unendliche) Klasse von Graphen G mit $i = 2 \vee i = n-1$ die Matrix A_G positiv definit.

Für $i = 3$ erhalten wir $f(i) = -\frac{9}{n+1}+3 < 2 \leftrightarrow n+1 < 9 \leftrightarrow n \leq 7$. Also gibt muß $n \leq 7$ sein falls $i \in \{3,\dots,n-2\}$ und A_G positiv definit ist. Man läßt sich von einem Computer ausrechnen für welche n und i mit $3 \leq n \leq 7$ die Ungleichung $f(i) < 2$ erfüllt ist, und erhält folgende Tabelle

n	i
3	2
4	2,3
5	2,3,4
6	2,3,4,5
7	2,3,5,6

Damit ist A_G genau dann positiv definit, falls

(a) G ist linear

(b) G besitzt einen linearen Subgraphen mit der Eigenschaft daß G durch Anfügen eines Punktes an einen Nachbarn eines Eckpunktes dieses linearen Subgraphen entsteht, d.h. $E = \{e_1,\dots,e_{n+1}\}, n \geq 3$ und $K = \{\{e_1,e_2\},\dots,\{e_{n-1},e_n\},\{e_2,e_{n+1}\}\}$.

(c) G gehört zu einem der folgenden acht Graphen (s. beigefügte Skizze)

[1] man erinnere sich an die Voraussetzung $n \geq 3$ die wir im letzten Abschnitt gemacht haben