Kurze Skizze zu Aufgabe 8.3c) - Einfachheit von A_n $(n \geq 5)$.

Es genügt zu zeigen, dass ein Normalteiler $\{e\} \neq N \triangleleft A_n$ im Fall $n \geq 5$ mindestens einen 3-Zyklus enthält. Dann muss er auch alle anderen 3-Zyklen enthalten (s. 2. Semester, Serie zu Gruppenwirkungen) und somit ist er gleich A_n, da ja nach a) alle 3-Zyklen A_n erzeugen.

Sei also $e \neq \sigma \in N$.
1. Fall: σ enthält einen mindestens 4-Zyklus $(abcd \dots x)$. Dann wählen wir $\psi := (abc)$ und rechnen nach, dass $\sigma\psi\sigma^{-1}\psi^{-1} = (abd)$, also ein 3-Zyklus ist. Wegen der Normalteilereigenschaft ist $\psi\sigma^{-1}\psi^{-1} \in N$, damit auch die Verknüpfung mit σ, wir haben also unseren 3-Zyklus.
Die Existenz weiterer elementfremder Zyklen in der Zerlegung von σ ändert daran nichts - die heben sich im Kommutator weg (diese Bemerkung gilt auch im Folgenden).
2. Fall: $\sigma = (abc)(df \dots)$. Mit $\psi := (abd)$ erhalten wir $\sigma\psi\sigma^{-1}\psi^{-1} = (adcfb)$, also auf 1. reduziert.
3. Fall: $\sigma = (ab)(cd)$. Wählen $f \neq a, b, c, d$ (gibt es, da $n \geq 5$) und wählen $\psi := (acf)$.
3.1. $\sigma(f) = f$, dann $\sigma\psi\sigma^{-1}\psi^{-1} = (abdec)$, also auf 1. reduziert.
3.2. $\sigma(f) \neq f$, dann $\sigma\psi\sigma^{-1}\psi^{-1} = (bd\sigma(f))(fca)$, also auf 2. reduziert.