HU Berlin Sommersemester 2006

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie II*

Prof. Dr. J. Kramer

Serie 8, Aufgabe 5e**

Aufgabenstellung (sinngemäß):

Zeigen Sie, dass eine Menge von 21 Punkten im $\mathbb{A}^4(\mathbb{F}_3)$ mindestens eine Gerade enthält.

Lösungsskizze:

Man muss wahrscheinlich so etwas als Übungsaufgabe stellen, damit man selbst auf Ideen kommt. Interessanterweise hilft uns Teilaufgabe c), obwohl das bei der Aufgabenstellung gar nicht beabsichtigt war. Skizzieren wir also mal eine typische S-Bahn-Idee:

Angenommen, es gibt 21 Punkte, von denen je keine drei kollinear sind. Drei nicht kollineare Punkte spannen eine Ebene auf, insgesamt also $\binom{21}{3} = 1330$ Ebenen. Wir wissen aber nach b), dass es im $\mathbb{A}^4(\mathbb{F}_3)$ nur 1170 verschiedene Ebenen gibt, also spannen einige Punktetripel dieselbe Ebene auf - d.h. es gibt Ebenen, in denen mehr als 3 Punkte liegen. Andererseits gibt es höchstens 4 Punkte in einer Ebene über $\mathbb{F}_3$, die keine Gerade enthalten. Bei einer 4er-Konfiguration wird diese Ebene oben 4-fach statt einfach gezählt, um die Differenz von $1330 - 1170 = 160$ auszugleichen, brauchen wir also mindestens $160/(4-1) = 53, \ldots$, also mindestens 54 verschiedene Ebenen, die 4 Punkte enthalten.

Diese 54 Ebenen enthalten also formal $54 \cdot 4 = 216$ Punkte der Menge, wobei offenbar viele mehrfach gezählt werden. Genauer gibt es wegen $216/21 = 10, \ldots$ einen Punkt in der Menge, durch den 11 Ebenen gehen, die 4 Punkte der Menge enthalten. Diese 11 verschiedenen Ebenen haben aber höchstens je zwei Punkte gemeinsam (mit dem dritten wären sie identisch), also hat diese Konfiguration mindestens $2 + 2 \cdot 11 = 24$ verschiedene Punkte, Widerspruch.