HU Berlin Wintersemester 2005/06

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I*

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 31.10.2005 nach der Vorlesung oder
bis 11.00 Uhr im Raum RUD 25, 2.302, Sekretariat Prof. Kramer

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben, und
JEDES Blatt mit Namen und Matrikelnummer versehen!

Serie 1 (40 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *injektiv*, wenn aus $f(x_1) = f(x_2)$ folgt, dass $x_1 = x_2$ ist. Die Abbildung heißt *surjektiv*, wenn für jedes $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert, so dass $f(x) = y$ ist. Eine Abbildung, die sowohl surjektiv als auch injektiv ist, heißt *bijektiv*.

a) Finden Sie eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ (dabei sei $2\mathbb{N}$ die Menge der geraden natürlichen Zahlen).

b) Finden Sie eine bijektive Abbildung $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$.

c) Finden Sie eine bijektive Abbildung von $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$.

d) Finden Sie eine surjektive Abbildung von $\mathbb{R}$ in den Kreis $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

e) Gibt es eine injektive Abbildung $f : \mathbb{R} \to S^1$?

Aufgabe 2 (6 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass es in einer Gruppe genau ein neutrales Element gibt.

b) Beweisen Sie für eine Gruppe $(G, \circ)$ die folgenden Identitäten $(a, b \in G)$:

$$(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1} \ , \qquad (a^{-1})^{-1} = a.$$

Aufgabe 3 (10 Punkte) (symmetrische Gruppe)

Sei $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ die Menge der ersten n natürlichen Zahlen. Mit S_n bezeichnen wir die Menge aller bijektiven Abbildungen von $[n]$ nach $[n]$.

a) Zeigen Sie, dass S_n (mit der Verknüpfung von Abbildungen als Gruppenoperation) eine Gruppe ist (wir bezeichnen sie auch als die *symmetrische Gruppe*).

b) Wieviele Elemente hat S_n?

c) Zeigen Sie: Für $n \geq 3$ ist S_n nicht kommutativ.

d) Finden Sie alle Untergruppen von S_3.

Aufgabe 4 (10 Punkte) **(Diedergruppe)**

a) Zeigen Sie, dass die Menge D_n aller ebenen Bewegungen (d.h. Drehungen, Spiegelungen und deren Kombinationen), die ein regelmäßiges n-Eck auf sich selbst abbilden, eine Gruppe ist ("n-te Diedergruppe").

b) Sei $a \in D_n$ eine Spiegelung und $b \in D_n$ eine Drehung um $\frac{2\pi}{n}$. Zeigen Sie:

$$a^2 = e \ , \qquad b^n = e \ , \qquad a \circ b \circ a = b^{-1} .$$

c) Zeigen Sie: Jedes Element aus D_n ist eindeutig als Produkt $a^l \circ b^m$ mit $l \in \{0, 1\}$, $m \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ darstellbar.

d) Bestimmen Sie die Ordnung von D_n.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Finden Sie alle Gruppen der Ordnung vier.