Übungsaufgaben zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I*

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 07.11.2005 nach der Vorlesung oder
bis 11.00 Uhr im Raum RUD 25, 2.302, Sekretariat Prof. Kramer

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben, und
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen!

Serie 2 (40 Punkte)

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Zeigen Sie: Seien $G = (G, \circ)$ eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine nichtleere Teilmenge. Beweisen Sie die Äquivalenz:

$$H \leq G \iff g \circ h^{-1} \in H, \forall g, h \in H.$$

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Wir definieren als *Zentrum* einer Gruppe $G = (G, \circ)$ die Menge

$$Z(G) := \{z \in G \mid g \circ z = z \circ g,\ \forall g \in G\}.$$

Zeigen Sie, dass $Z(G)$ eine kommutative Untergruppe von G ist.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Sei $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) $f(e_G) = e_H$, wobei e_G das neutrale Element von G und e_H das neutrale Element von H bezeichnet.

b) $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$ für alle $g \in G$.

c) Der Kern $\ker(f) := \{g \in G \mid f(g) = e_H\}$ von f ist eine Untergruppe von G.

d) Das Bild $\mathrm{im}(f) := \{h \in H \mid \exists g \in G :\ h = f(g)\}$ von f ist eine Untergruppe von H.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Eine Gruppe $G = (G, \circ)$ heißt *endlich erzeugt*, falls eine endliche Teilmenge $S \subseteq G$ existiert, so dass jedes Element von G als Verknüpfung von Elementen aus S oder deren Inversen dargestellt werden kann.
Zeigen Sie: Jede endlich erzeugte Untergruppe von $(\mathbb{Q}, +)$ ist isomorph zur Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$.

Hinweis: Ist $G \leq (\mathbb{Q}, +)$ zunächst eine Untergruppe mit den beiden Erzeugenden p, q, so bringe man diese auf einen Hauptnenner $p = a/N$, $q = b/N$ ($a, b \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{N}$), und beweise dann $G = \lambda/N \cdot \mathbb{Z}$, wobei λ die kleinste positive Zahl der Form $ma + nb$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$ ist. Danach verallgemeinere man diese Überlegungen auf den Fall einer beliebigen endlich erzeugten Untergruppe von $(\mathbb{Q}, +)$.

Aufgabe 5 (9 Punkte)

a) Sei $\mathbb{R}_{>0} := \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$. Zeigen Sie, dass die Exponentialabbildung

$$\begin{array}{rccc} \exp: & (\mathbb{R}, +) & \longrightarrow & (\mathbb{R}_{>0}, \cdot) \\ & r & \mapsto & \exp(r) \end{array}$$

ein Gruppenhomomorphismus ist, und berechnen Sie Kern und Bild von exp.

b) Es sei D_n die aus Serie 1, Aufgabe 4, bekannte Diedergruppe. Dort wurde bewiesen, dass jedes Element eindeutig in der Form $a^l \circ b^m$ mit $l \in \{0, 1\}$, $m \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ darstellbar ist (hierbei ist $a \in D_n$ eine Spiegelung und $b \in D_n$ eine Drehung um $\frac{2\pi}{n}$).

Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{sgn}: & (D_n, \circ) & \longrightarrow & (\{\pm 1\}, \cdot) \\ & a^l \circ b^m & \mapsto & (-1)^l \end{array}$$

ein Gruppenhomomorphismus ist, und berechnen Sie Kern und Bild von sgn.