Übungsaufgaben zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I*

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 14.11.2005 nach der Vorlesung oder
bis 11.00 Uhr im Raum RUD 25, 2.302, Sekretariat Prof. Kramer

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben, und
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen!

Serie 3 (40+10 Punkte)

Aufgabe 1 (6 Punkte)

a) Finden Sie alle Gruppenhomomorphismen $f : (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$.

b) Seien p eine Primzahl und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, die nicht durch p teilbar ist. Finden Sie alle Gruppenhomomorphismen $g : (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

a) Sei $H_1 = \{(), (12)\} \leq S_3$ eine zyklische Untergruppe der Ordnung 2 von S_3. Bestimmen Sie alle Linksnebenklassen von H_1.

b) Sei $H_2 = \{(), (123), (132)\} \leq S_3$ die zyklische Untergruppe der Ordnung 3 von S_3. Bestimmen Sie alle Rechtsnebenklassen von H_2.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Zeigen Sie:

a) Das Zentrum $Z(G)$ ist ein Normalteiler in G.

b) Der Kern $\ker(f)$ eines Gruppenhomomorphismus' $f : G \longrightarrow H$ ist ein Normalteiler in G.

c) Welche der Untergruppen der S_3 (s. Serie 1, Aufgabe 3) sind Normalteiler?

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Es sei $H \leq G$ eine Untergruppe vom Index 2.

a) Zeigen Sie, dass H in G Normalteiler ist!

b) Geben Sie einen surjektiven Homomorphismus von G nach der zyklischen Gruppe mit zwei Elementen an.

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Sei $V_4 = \{(), (12)(34), (13)(24), (14)(32)\} \leq S_4$ gegeben. Man zeige, dass V_4 Normalteiler in S_4 ist und folgende Isomorphie besteht:

$$S_4/V_4 \cong S_3.$$

Aufgabe 6* (10 Punkte)

Sei $(G, \circ)$ eine endliche Gruppe und $H \leq G$ eine Untergruppe.

a) Zeigen Sie, dass G genau dann zyklisch ist, wenn ein g mit $\mathrm{ord}(g) = |G|$ existiert.

b) Sei G eine endliche zyklische Gruppe der Ordnung n mit einem Erzeuger g. Zeigen Sie, dass ein Element $g^m \in G$ genau dann G erzeugt, wenn der g.g.T.$(n, m) = 1$ ist.