HU Berlin Wintersemester 2005/06

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I*

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 21.11.2005 nach der Vorlesung oder
bis 11.00 Uhr im Raum RUD 25, 2.302, Sekretariat Prof. Kramer

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben, und
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen!

Serie 4 (40 Punkte)

Aufgabe 1 (8 Punkte) (Isomorphiesätze)

a) Es seien G eine Gruppe und $H, K \trianglelefteq G$ Normalteiler in G mit $K \subseteq H$. Zeigen Sie: K ist Normalteiler in H, und es besteht die Isomorphie

$$(G/K)/(H/K) \cong G/H.$$

b) Es seien $\varphi : G \longrightarrow G'$ ein Homomorphismus und $H' \trianglelefteq G'$ ein Normalteiler. Zeigen Sie, dass $H = \varphi^{-1}(H')$ ein Normalteiler in G ist und es einen kanonischen injektiven Homomorphismus

$$\varphi_* : G/H \longrightarrow G'/H'$$

gibt.

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler $d = (123456789, 555555555)$ und eine Darstellung von d der Form $d = x \cdot 123456789 + y \cdot 555555555$ mit $x, y \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Beweisen Sie für alle $a, b, c \in R$ die folgenden Rechenregeln:

a) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$;

b) $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$;

c) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$;

d) $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$;

e) $(b - c) \cdot a = b \cdot a - c \cdot a$.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass $R = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$ ein kommutativer Unterring von $\mathbb{C}$ mit Einselement ist!

b) Zeigen Sie, dass $1, -1, i, -i$ die Einheiten in R sind!

Aufgabe 5 (8 Punkte)

a) Wir definieren $\varphi(m) := |(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times|$ als die Ordnung der Einheitengruppe von $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Beweisen Sie den *Satz von Euler*:

$$\overline{a}^{\varphi(m)} = \overline{1} \quad \forall\, \overline{a} \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times.$$

b) Bestimmen Sie $\varphi(m)$ und die Lösung der Gleichung $\overline{x}^e = \overline{11}$ in $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ für $m = 3233 = 53 \cdot 61$ und $e = 851$.