HU Berlin Wintersemester 2005/06

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I*

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 28.11.2005 nach der Vorlesung oder
bis 11.00 Uhr im Raum RUD 25, 2.302, Sekretariat Prof. Kramer

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 5 (40+10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte) (Polynomring)

Es sei K ein Körper. Wir bezeichnen mit $K[X]$ die Menge der Polynome in der Variablen X mit Koeffizienten aus K.

a) Zeigen Sie, dass $K[X]$ ein kommutativer Ring mit Einselement ist. Dabei können Assoziativität, Kommutativität und Distributivität der Operationen als bekannt vorausgesetzt werden.

b) Zeigen Sie, dass es keine Nullteiler in $K[X]$ gibt.

c) Sei $\deg : K[X]\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$ die Abbildung, die jedem Polynom seinen Grad zuordnet. Zeigen Sie, dass für $f, g \in K[X] \setminus \{0\}$ die Gleichung $\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$ gilt.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

a) Lösen Sie die folgenden Gleichungen in $\mathcal{R}_{13}$:

$$5X = 2\,; \quad 3X + 4 = 5\,; \quad 4^X = 1.$$

b) Sei $p \geq 3$ eine Primzahl. Bestimmen Sie in $\mathcal{R}_p$ das multiplikative Inverse von $p-1$ und $p-2$.

c) In welchem der folgenden Körper K hat die Gleichung $X^2 + 1 = 0$ eine Lösung?

$$K = \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3, \mathcal{R}_5, \mathcal{R}_7, \mathcal{R}_{11}.$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es sei $R = (R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Einselement 1 und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Weisen Sie nach, dass auf der Faktorgruppe $(R/\mathfrak{a}, +)$ durch

$$(r_1 + \mathfrak{a}) \cdot (r_2 + \mathfrak{a}) := (r_1 \cdot r_2) + \mathfrak{a} \qquad (r_1, r_2 \in R)$$

eine wohldefinierte Multiplikation festgelegt wird. Gibt es ein Einselement in $(R/\mathfrak{a}, +, \cdot)$?

Aufgabe 4 (10 Punkte) (Der Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$)

a) Beweisen Sie, dass die Gleichung $X^2 = 3$ keine rationalen Lösungen in $\mathbb{Q}$ besitzt.

b) Wir definieren auf der Menge $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b \cdot \sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ wie folgt eine Addition und Multiplikation:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1 \cdot \sqrt{3}) + (a_2 + b_2 \cdot \sqrt{3}) &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot \sqrt{3}, \\ (a_1 + b_1 \cdot \sqrt{3}) \cdot (a_2 + b_2 \cdot \sqrt{3}) &= (a_1 \cdot a_2 + 3 \cdot b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) \cdot \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Für diese Operationen gelten die Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetze. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Q}(\sqrt{3}), +, \cdot)$ auch die restlichen Ringaxiome erfüllt.

c) Beweisen Sie, dass $(\mathbb{Q}(\sqrt{3}), +, \cdot)$ ein Körper ist.

d) Ist die Gleichung $X^2 = 3$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ lösbar?

Aufgabe 5* (10 Punkte)

a) Zeigen Sie: $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist kein Körper.

b) Konstruieren Sie einen Körper mit 4 Elementen.
Hinweis: Das kann über Additions- und Multiplikationstabellen erfolgen, allerdings ist in diesem Fall der Nachweis des Distributivgesetzes sehr aufwendig. Eine andere Idee wäre, die Strategie der vorherigen Aufgabe für eine geeignetes quadratisches Polynom in $\mathbb{F}_2[X]$ zu verfolgen.