Übungsaufgaben zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I*

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 05.12.2005 nach der Vorlesung oder
bis 11.00 Uhr im Raum RUD 25, 2.302, Sekretariat Prof. Kramer

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 6 (40+10 Punkte)

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Es sei $A \neq \emptyset$ eine nichtleere Menge und $R := \{f : A \longrightarrow \mathbb{R}\}$ die Menge der Funktionen von A nach $\mathbb{R}$. Durch die Operationen

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \qquad \text{und} \qquad (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$$

wird R zu einem kommutativen Ring mit 1.

a) Es sei $a \in A$ fixiert. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{ev}_a : & R & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & f(a) \end{array}$$

ein Ringhomomorphismus ist.

b) Beweisen Sie, dass die Menge $\mathfrak{a} := \{f \in R \mid f(a) = 0\}$ ein Ideal in R ist, und zeigen Sie, dass $R/\mathfrak{a} \cong \mathbb{R}$ gilt.

c) Zeigen Sie: Wenn für ein Ideal $\mathfrak{b}$ die Inklusionen $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \subseteq R$ gelten, dann ist entweder $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{b} = R$.

Aufgabe 2 (13 Punkte)

a) Entscheiden Sie für die folgenden Teilmengen des Vektorraums $V = \mathbb{R}^3$, ob sie ein $\mathbb{R}$-Vektorraum sind:

(1) $V_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0 \text{ oder } x = y\}$,

(2) $V_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0 \text{ und } x = y\}$,

(3) $V_3 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = n, y = 2n, z = 3n \text{ mit } n \in \mathbb{Q}\}$,

(4) $V_4 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = n, y = 2n, z = 3n \text{ mit } n \in \mathbb{R}\}$.

b) Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum W aller Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen. Entscheiden Sie, welche der folgenden Teilmengen Unterräume von W sind:

(1) $W_1 := \{(a_n) \in W \mid \lim_{n\to\infty}(a_n) = 0\}$,

(2) $W_2 := \{(a_n) \in W \mid \lim_{n\to\infty}(a_n) = 1\}$,

(3) $W_3 := \{(a_n) \in W \mid (a_n) \text{ ist konvergent }\}$,

(4) $W_4 := \{(a_n) \in W \mid \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ a_n = a_{n+1}, \ \forall n \geq n_0\}$.

Aufgabe 3 (9 Punkte)

Seien U_1 und U_2 zwei Unterräume eines K-Vektorraums V.

a) Zeigen Sie, dass auch der Durchschnitt $U_1 \cap U_2$ ein Unterraum von V ist.

b) Geben Sie ein Beispiel dafür, dass die Vereinigung $U_1 \cup U_2$ kein Unterraum von V ist.

c) Zeigen Sie: $U_1 \cup U_2$ ist genau dann ein Unterraum von V, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$ gilt.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Wir betrachten die Menge U aller Vektoren $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ des Vektorraums K^n, welche die m Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \cdots + \alpha_{1n}\xi_n &= 0 \\ \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \cdots + \alpha_{2n}\xi_n &= 0 \\ &\vdots \\ \alpha_{m1}\xi_1 + \alpha_{m2}\xi_2 + \cdots + \alpha_{mn}\xi_n &= 0 \end{aligned}$$

erfüllen ($\alpha_{j,k} \in K$; $j = 1, \ldots, m$; $k = 1, \ldots, n$). Zeigen Sie, dass U ein Unterraum von K^n ist!

Aufgabe 5* (10 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum ist.

b) Finden Sie eine unendliche, echt aufsteigende Folge $U_0 \subsetneqq U_1 \subsetneqq \ldots$ von $\mathbb{Q}$-Unterräumen U_n $(n \in \mathbb{N})$ des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{R}$!

Hinweis: Teil b) ist schwer. Eine mögliche Idee beruht auf Aufgabe 4 in der Serie 5.