HU Berlin Wintersemester 2005/06

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I*

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 12.12.2005 nach der Vorlesung oder
bis 11.00 Uhr im Raum RUD 25, 2.302, Sekretariat Prof. Kramer

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 7 (40+10 Punkte)

Aufgabe 1 (9 Punkte)

Wir betrachten die Vektoren

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^4$;

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{F}_3$-Vektorraum $\mathbb{F}_3^3$;

c) $\begin{pmatrix} -(i+1) \\ i-2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -(i-1) \\ 2 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^2$;

d) $\ln(2)$, $\ln(3)$ im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$.

Stellen Sie in jedem Fall fest, ob diese Vektoren linear unabhängig sind und ob sie ein Erzeugendensystem des jeweiligen Vektorraums bilden.

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Sei $M = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ eine endliche Teilmenge eines K-Vektorraums V.
Zeigen Sie: Die Menge $< v_1, \dots, v_n >$ aller Linearkombinationen von $v_1, \dots, v_n$ ist der kleinste Unterraum von V, der M enthält.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Im K-Vektorraum $V = K^3$ betrachten wir die Unterräume

$$U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \mid \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0 \right\},$$

$$U_2 := K \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} := \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in K \right\}.$$

Zeigen Sie, dass für $K = \mathbb{R}$

$$U_1 + U_2 = V$$

ist. Gilt dies auch für $K = \mathbb{F}_3$?

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Sei $M \neq \{0\}$ eine Teilmenge eines K-Vektorraumes. Zeigen Sie: M ist genau dann linear abhängig, wenn eine endliche Teilmenge $\{x, x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq M$ und Skalare $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$ existieren, so dass $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot x_j$ ist.

Aufgabe 5 (9 Punkte)

Es sei V ein K-Vektorraum und $\mathfrak{B} \subseteq V$. Beweisen Sie, dass die drei folgenden Aussagen äquivalent sind:
(i) $\mathfrak{B}$ ist eine Basis von V.
(ii) $\mathfrak{B}$ ist ein minimales Erzeugendensystem von V.
(iii) $\mathfrak{B}$ ist eine maximal linear unabhängige Teilmenge von V.

Aufgabe 6* (10 Punkte)

Es seien $v_1, \dots, v_n$ $(n \geq 2)$ Vektoren in einem K-Vektorraum V.
Zeigen Sie: Die $(n-1)$ Vektoren $v_1 - v_n, \dots, v_{n-1} - v_n$ sind linear unabhängig genau dann, wenn die $(n-1)$ Vektoren $v_2 - v_1, \dots, v_n - v_1$ linear unabhängig sind.