HU Berlin Wintersemester 2005/06

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I*

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 02.01.2006 nach der Vorlesung oder
bis 11.00 Uhr im Raum RUD 25, 2.302, Sekretariat Prof. Kramer

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 8 (40+10 Punkte)

Aufgabe 1 (9 Punkte)

Im Vektorraum $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ der reellen Polynome höchstens dritten Grades betrachten wir die Teilmenge $M = \{X^3 - X + 1, X^3 - 1, X^2 - X\}$.

a) Untersuchen Sie, ob M linear unabhängig ist.

b) Ist M eine Basis?

c) Wenn M keine Basis ist, ergänzen Sie M zu einer Basis von $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$!

Aufgabe 2 (9 Punkte)

Ist $S = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$ linear unabhängig?
Geben Sie eine Basis von $\langle S \rangle$ an! Ergänzen Sie $\{v_1, v_2\}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$!

Aufgabe 3 (11 Punkte)

Im Vektorraum $V = \mathbb{Q}^4$ seien die Unterräume

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} \mid -\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 = 0 \right\} \text{ und } U_2 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

gegeben.
Geben Sie jeweils Basen für die Unterräume $U_1, U_2, U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$ an.

Bitte auch die Rückseite beachten!

Aufgabe 4 (11 Punkte)

a) Beweisen Sie, dass ein Vektorraum V der Dimension n über dem Körper $\mathbb{F}_p$ genau p^n Elemente besitzt.

b) Wieviele zweidimensionale Unterräume des $\mathbb{F}_2^3$ gibt es?

Aufgabe 5* (10 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Familie $\{\sin(mx), \cos(nx)\}_{m,n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ linear unabhängig in $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist.

b) Liegt die konstante Funktion $f(x) = 1$ im davon aufgespannten Unterraum?