Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I*

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 16.01.2006 nach der Vorlesung oder
bis 11.00 Uhr im Raum RUD 25, 2.302, Sekretariat Prof. Kramer

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 10 (40 Punkte)

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Wir betrachten die lineare Abbildung $f : \mathbb{Q}^4 \longrightarrow \mathbb{Q}^3$, gegeben durch

$$f\left(\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \xi_1 - \xi_3 \\ \xi_2 - \xi_3 \\ \xi_1 - \xi_2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine Basis von $\ker(f)$ und ergänzen Sie diese zu einer Basis $\mathfrak{B}$ von $\mathbb{Q}^4$.

b) Zeigen Sie, dass die Bilder der hinzugenommenen Vektoren eine Basis von $\operatorname{im}(f)$ bilden.

c) Ergänzen Sie diese Basis von $\operatorname{im}(f)$ zu einer Basis $\mathfrak{C}$ von $\mathbb{Q}^3$ und geben Sie die Abbildungsmatrix von f bezüglich $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ an.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Seien V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $\{b_1, \ldots, b_n\}$, $\{b'_1, \ldots, b'_n\}$ zwei geordnete Basen von V. Zeigen Sie, dass genau ein Isomorphismus $f \in \mathrm{GL}(V)$ mit $f(b_j) = b'_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ existiert.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Seien K ein Körper und V, W zwei K-Vektorräume. Mit $\mathrm{L}(V, W)$ bezeichnen wir die Menge der linearen Abbildungen von V nach W.

a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{L}(V, W)$ durch die Operationen

$$(f + g)(v) := f(v) + g(v) \quad (f, g \in \mathrm{L}(V, W);\ v \in V),$$

$$(\lambda \cdot f)(v) := \lambda \cdot f(v) \quad (f \in \mathrm{L}(V, W);\ \lambda \in K,\ v \in V)$$

zu einem K-Vektorraum wird.

b) Berechnen Sie $\dim_K \mathrm{L}(V,W)$ in dem Fall, dass V und W endlich dimensionale Vektorräume sind.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Wir betrachten die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, die durch $f\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 17 \end{pmatrix}$ und $f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$ eindeutig als lineare Fortsetzung festgelegt ist.

a) Zeigen Sie, dass f ein Isomorphismus ist.

b) Geben Sie die Abbildungsmatrix von f bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ an.

Aufgabe 5 (10 Punkte)
(Faktorraum und Homomorphiesatz für lineare Abbildungen)

Es seien V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Unterraum.

a) Zeigen Sie, dass auf der Faktorgruppe $(V/U, +)$ durch $\lambda \cdot (v + U) := (\lambda \cdot v) + U$ $(\lambda \in K, v \in V)$ eine wohldefinierte Skalarmultiplikation gegeben ist und dadurch V/U die Struktur eines K-Vektorraums besitzt.

b) Beweisen Sie, dass die natürliche Abbildung $\pi : V \longrightarrow V/U$ eine lineare Abbildung ist. Weiterhin gilt $\dim_K U + \dim_K V/U = \dim_K V$.

c) Sei weiterhin W ein K-Vektorraum und $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung; π bezeichne in diesem Fall die natürliche Abbildung $\pi : V \longrightarrow V/\ker(f)$. Zeigen Sie: Es existiert genau eine injektive lineare Abbildung $\overline{f} : V/\ker(f) \longrightarrow W$ mit $f = \overline{f} \circ \pi$.