Übungsaufgaben zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I*

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 23.01.2006 nach der Vorlesung oder
bis 11.00 Uhr im Raum RUD 25, 2.302, Sekretariat Prof. Kramer

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 11 (40+10 Punkte)

Aufgabe 1 (12 Punkte)

a) Berechnen Sie den Spaltenrang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

durch direkte Bestimmung der maximalen Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren von A.

b) Berechnen Sie den Zeilenrang der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

durch direkte Bestimmung der maximalen Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren von B.

c) Berechnen Sie den Rang der Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \\ 2 & 6 & 9 & 12 & 15 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \\ 4 & 9 & 14 & 21 & 24 \end{pmatrix}$$

mittels elementarer Umformungen. Geben Sie bei jedem Umformungsschritt die vorgenommene elementare Umformung an.

Aufgabe 2 (7 Punkte)
Berechnen Sie den Rang der komplexen Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit von $a, b \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 3 (9 Punkte)

Es seien U, V, W, drei K-Vektorräume und $f : U \longrightarrow V$, $g : V \longrightarrow W$ zwei lineare Abbildungen. Beweisen Sie die Ungleichungen

a) $\operatorname{rg}(g \circ f) \leq \min(\operatorname{rg}(f), \operatorname{rg}(g))$.

b) $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) \leq \dim_k V + \operatorname{rg}(g \circ f)$.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Gegeben seien die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -6 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie, sofern die Ausdrücke erklärt sind:
$5C - 2F$, AB, BC, CB, AD, A^tD, $(CB)^t$, $(AB)G$, $A(BG)$.

Aufgabe 5* (10 Punkte)

Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ der reellen quadratischen Matrizen. Für $A = (\alpha_{k,j})_{1 \leq k,j \leq n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ wird mit $A^t := (\alpha_{j,k})_{1 \leq k,j \leq n}$ *die transponierte Matrix von A* bezeichnet (bildlich: die Matrix A wird an der Hauptdiagonalen gespiegelt).

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : V \longrightarrow V$, gegeben durch $f(A) = A + A^t$, eine lineare Abbildung ist.

b) Berechnen Sie $\ker(f)$ und $\operatorname{im}(f)$ sowie die Dimensionen beider Räume.

c) Zeigen Sie, dass $V = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)$ ist, d.h. $V = \ker(f) + \operatorname{im}(f)$ und $\ker(f) \cap \operatorname{im}(f) = \{0\}$.