HU Berlin Wintersemester 2005/06

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I*

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 13.02.2006 nach der Vorlesung oder
bis 11.00 Uhr im Raum RUD 25, 2.302, Sekretariat Prof. Kramer

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 13 - Freiwillige Abgabe - (0+60 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

1. Lösen Sie folgendes lineares Gleichungssystem mit dem Gauß-Algorithmus:

a)

$$\begin{aligned}
\xi_1 + 3\xi_2 + 4\xi_3 + 2\xi_5 &= 0 && (1)\\
2\xi_1 + 5\xi_2 + 7\xi_3 + \xi_4 &= 0 && (2)\\
-\xi_1 + 2\xi_2 - 3\xi_3 &= 1 && (3)\\
3\xi_1 + 8\xi_2 + 11\xi_3 + 4\xi_4 &= 1 && (4)\\
3\xi_1 + 8\xi_2 + 11\xi_3 + \xi_4 + 2\xi_5 &= 3 && (5)
\end{aligned}$$

b) Lösen Sie das lineare Gleichungssytem aus 1.a) mit einer beliebigen rechten Seite $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5)^t$. Unter welcher Bedingung an $\beta_1, \ldots, \beta_5$ ist das Gleichungssystem lösbar?

Aufgabe 2 (10 Punkte)

The combined ages of Mary and Ann are 44 years, and Mary is twice as old as Ann was when Mary was half as old as Ann will be when Ann is three times as old as Mary was when Mary was three times as old as Ann. How old is Ann?

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Seien $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ Vektoren im $\mathbb{Q}^5$.

Geben Sie ein lineares Gleichungssystem an, dessen Lösungsmenge gleich der Menge der linearen Hülle $< v_0, v_1, v_2 >$ ist.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Stellen Sie die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ als Produkt von Elementarmatrizen (also Matrizen, deren Multiplikation von links bzw. rechts einer elementaren Zeilen- bzw. Spaltenumformung entspricht) dar.

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Es seien K ein Körper, $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ eine $(m \times n)$-Matrix und $B \in \mathrm{GL}_n(K)$ eine reguläre $(n \times n)$-Matrix.

a) Zeigen Sie, dass der Rang von A gleich dem Rang von AB ist.

b) Welche Möglichkeiten gibt es für diese Ränge, wenn B nicht regulär ist?

c) Unter welcher Bedingung gibt es eine Matrix $C \in \mathrm{M}_{n,m}(K)$, so dass $AC = E_m$ ($E_m = m$-reihige Einheitsmatrix) ist?

d) Berechnen Sie für $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ eine solche Matrix C.

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Sei $\pi \in S_n$ eine Permutation. Wir assoziieren zu π die Permutationsmatrix $P_\pi = (\delta_{k,\pi(j)})_{1 \leqslant k,j \leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F}_2)$. Zur Erinnerung: $\delta_{k,j} = 1$, falls $k = j$ ist und 0 sonst.
Beweisen Sie, dass durch die Zuordnung $\pi \longmapsto P_\pi$ ein injektiver Gruppenhomomorphismus $P : S_n \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_2)$ gegeben wird.