DRAMATIS PERSONAE

Julius Eigen (J.), verzweifelter Student
Al Gebraios (A.), Gott der Mathematik (derzeit an der HU inkarniert)

1. Akt
Exposition

J. Wie raubt mir, ach, des Schlafes Stunden,
seit Tagen diese Matrix nur!
Hab' durch Probieren nicht gefunden,
der Eigenwerte einen nur.

Ihr Götter, gebt doch einen Satz,
Zu finden sie auf leichtem Wege,
auf dass man sie an jedem Platz
im Kopf allein berechnen möge.

A. Halt ein, Student, du bist erhört
und bist erlöst von deiner Fron,
kannst du berechnen unbeschwert
die Nullstell' eines Polynom.

Charakteristisch ist es eben,
und heißen soll's $p_A(t)$.
Nur Mut! Ganz einfach ist's gegeben
durch $\det(A - t \cdot E)$.

Für jeden deiner Eigenwerte
wird dieser Ausdruck annulliert
(und auch nur dort, dies noch erhärte
das Lemma, das hier präsentiert).

2. Akt
Durchführung

J. Vor Ehrfurcht seht ihr mich erblassen,
ich weiß nicht, ob's mir kalt, ob heiß.
Doch fließt Erkenntnis auch in Massen:
Zur Seligkeit fehlt der Beweis!

A. Ordnung im Denken, Zucht im Geist,
ist für den Mathematiker
die höchste Tugend, da zumeist
das Leben sonst zu einfach wär.

So lasst uns nun das Lemma zeigen
(tiefsinnig ist's nicht sonderlich),
In K sei ein Wert λ eigen,
der Matrix A. Dann findet sich

im K^n ein Element,
sei's x genannt, für das man fix
erkennt: $x \neq 0$ muss gelten,
zudem $Ax = \lambda x$.

Das kannst du anders schreiben: in
der Form $(A - \lambda E)$
$\cdot x = 0$ Mit klugem Sinn
nenn diese Matrix einmal B.

Nun sieh! Dann wissen wir von ihr
$Bx = 0$, und da zumal
$x \neq 0$ ist, sehen wir:
Ihr Kern ist nicht mehr trivial!

Doch muss dann die Determinante
$= 0$ sein, wie ich einst gelehrt.
J. Wer diesen Fakt zuerst erkannte,
der sei gesegnet und geehrt!

$p_A(\lambda)$ aber gleicht,
$\det(B)$, wie man sofort erkennt,
weshalb das Ende ich erreicht -
denn all dies ist äquivalent.

3. Akt
Finale

J. Gelobt sei der Schöpfer jener
Äquivalenzen! Find' ich doch
die Eigenwerte so viel schöner
Erlöst bin ich von meinem Joch!

A. Manch weiser Rat von Professoren
Erkenntnis auf Erkenntnis häuft.
Trau aufmerksam nur deinen Ohren
dann siehst du, wie der Hase läuft!

Und der Haifisch, der hat Zähne,
und die trägt er im Gesicht.
Ein Vektorraum, hat 'ne Basis,
doch die sieht man meistens nicht.

Einfach ist dies noch zu zeigen
wenn erzeugt er endlich ist.
Mit dem Austauschsatz von Steinitz
den man leider oft vergißt.

Mit Erzeugendensystemen
startet man die Rechnerei'n.
Ist 'ne Relation vorhanden
streichen wir sie einfach klein.

Die Vektoren, sie verschwinden
wenn sie überflüssig sind.
übrig bleibt am End' die Basis
das begreift noch jedes Kind.

Doch im allgemeinen Falle.
da beginnt die Qual von vorn.
Denn man braucht dann noch ein Lemma,
und zwar jenes von Herrn Zorn.

Nimmt man Mengen, die nicht leer sind,
linear unabhängig schon -
sind sie induktiv geordnet
und zwar durch die Inklusion.

Hat man aufsteigende Ketten
dann vereinigt man sie schlicht.
Das gibt eine ob're Schranke
Abhängig werden sie nicht.

Dann gibt es wie durch ein Wunder,
ein maximales Element,
leider kann man es nicht sehen
drum man's "Zornsches Lemma" nennt.

Und so kommt zum schönen Ende
alles unter einen Hut
Aus "maximal" folgt nämlich "Basis"
und so wird dann alles gut.

Merke gut dir diesen Lehrsatz,
immer wieder kommt er dran.
Denn 'ne Basis ist keine Basis
wenn man's nicht beweisen kann.

Es trafen sich im Land Lineà
zwei altbekannte Schlingel:
Die Elemente g und h
mit der Verknüpfung „Kringel“.

Die beiden waren aus Groß-H
das liegt in G, der Gruppe.
Ob H nun selber Gruppe war,
das war den zwei nicht schnuppe.

Und h behauptete nun keck
da es das zeigen werde.
Zuerst nun drehte es sich weg
und nahm den Kopf zur Erde.

Und wie es das so kunstvoll tat,
sah g mit einem Male:
Das e, das keine Arbeit hat,
das ist wohl das Neutrale.

Die beiden gaben sich die Hand
und stellten dabei fest:
Groß-H war immer noch ihr Land
und fertig war der Test.

Der Rückweg, dachte g zuerst,
wär völlig offenbar.
Doch h sprach: „Eh du dich beschwerst
mach ich dir das mal klar.

Es gibt, denn H ist Untergruppe,
Neutrale und Inverse.
Drum stehe ich auf meinem K(o)uppe
beim Sprechen dieser Verse.

Der Kringel, der uns zwei vereint
ist assoziativ.
Die Hand reich mir, und wie mir scheint,
der Sinn ist gar nicht tief.“

Und wie sie da so glücklich standen,
im Lande Lineà,
dachten sie an die Verwandten,
und ihnen wurde klar:

Das simple Untergruppenlemma,
das gilt nicht nur für sie;
für alle Elemente, imma,
gilt diese Theorie.

Singe mir, Göttin, von Zorn das furchterregende Lemma,
das der Athenejünger unnennbaren Jammer erregte,
Griechen und Troern gleich in feindliche Lager zerspaltend,
Ewig entzweit im Streite, allein ob der einzigen Frage:
Gibt eine Auswahl es stets aus einem Produkt von den Mengen,
keine von ihnen sei leer, doch sonst sein sie völlig beliebig.
Ist dieses wahr, nimm' her dir eine beliebige Menge
vollkommen gleich, ob unendlich sie sei oder doch endlich,
aber geordnet, auf diese ewig vollkommene Weise
dass eine jede Kette, aufsteigend nach oben, beschränkt ist.
Wie Du gelangst, vom Hades hinaufgehend, zu den Ufern des Styxes,
Weiter hin zu den rossenährenden Ebnen von Argos,
Oder zum Tempel von Phöbus im heiligen Hain von Olympia,
Doch nie gelangen wirst zu den Sternen, wie lang' du auch wandelst.
Induktiv heißt solche Ordnung seit unvordenklichen Zeiten.
Finden wirst Du alsdann allein eine äußerste Höhe,
Maximal wird ein solch Element geheißen, dieweil du
nimmer wirst weiter steigen können von dort in jeglicher Richtung.
Gleich wie des Kroniden wolkengekrönter Olympus
alles umher überraged, und nichts an Höhe ihm gleichkommt.

Ode an den Hauptsatz

Ist die Mathematik auch noch so schwer,
mag ich sie dennoch wirklich sehr!

Hauptsatz der affinen Geometrie,
macht die Vorstellung einfach wie noch nie.

Der $\mathbb{A}$ von (V) ist der reelle Raum.
Der Körper ebenso - man glaubt es kaum.

Die Dimension ist mindest die Zweite,
eine Bijektion steht ihr zur Seite.

Sie bildet ab die Punkte kollinear,
in drei Geradenpunkte - ist doch klar.

So kommt man schnell zu diesem Schluss - genial!
f ist affin und bijektiv - trivial.

Palmström, etwas schon an Jahren,
wird auf einer Bildgeraden
von 'nem Punkte, überladen,
schnurgerade überfahren.

"Wie war" (spricht er, sich erhebend
und entschlossen weiterlebend)
"möglich, wie dies Unglück, ja-:
dass es überhaupt geschah?"

"Ist die Staatskunst anzuklagen
in Bezug auf Bildgeraden?
Gab die Abbildungsvorschrift,
hier den Punkten freie Trift?"

"Oder war vielmehr verboten,
hier Lebendige zu Toten
umzuwandeln, - kurz und schlicht:
durfte die Gerade nicht - ?"

"Noch im Urbild gab ich achte
Was die böse G(e)rade machte,
dort stand ich doch noch beiseite,
ohne dass es mich gereute."

"Doch im Bilde ging es schief:
Konnte etwa es geschehen,
dass das f - nur aus Versehen -
gar nicht wäre bijektiv?"

"Ist das f so sonderbar,
dass drei Punkte, kollinear,
durch das Bild so seltsam schleichen,
dass sie nicht mehr ihresgleichen?"

Nein! geprüft sind beide Dinge,
Und so hüpft er aus der Schlinge,
f ist zweifellos affin,
und zu Unrecht traf es ihn.

So nun wirkt, bei jedem Wetter,
Algebra als Lebensretter,
Weil - so schliesst man flugs sodann,
nicht sein darf, was nicht sein kann.

Wenn die Abbildung f ist linear
dann find' ich das schon ganz wunderbar.
Sie sollte auch ein Endomorphismus sein
sonst würde ich bald sehr traurig sein.

Dann möcht' ich sie so gern diagonalisieren
doch frag' ich mich, wann ist das zu realisieren,
dazu lernen wir in Algebra Sätze recht viele
um uns zu erleichtern dieses Spiele.

Einen davon, den mag ich sehr gern,
ihn einfach nur nennen, das liegt mir fern,
ich möchte ihn nun in Reimform bringen,
dann wird er, so hoff' ich, noch besser klingen.

Ich werde es voller Vorfreude versuchen,
gelingt es mir nicht, dann bitte nicht fluchen,
sonst wäre ich nämlich sehr deprimiert
und in Zukunft wohl nicht mehr so engagiert.

Es soll "f" ein Endomorphismus sein,
denn dann sind die Bedingungen an f sehr klein,
kommt $p_f(t)$ als Produkt von Linearfaktoren daher,
so freut sich die Abbildung f schon sehr.

Auch geometrische und algebraische Vielfachheiten,
müssen die gleichen Werte beschreiten.
Dies müssen sie für jeden Eigenwert von f machen,
sonst hätte der Endomorphismus nichts zu lachen.

Ja dann und genau dann ist f zu diagonalisieren,
und das macht mir die Aufgaben oft leichter, die schwierigen,
Deswegen find' ich diesen Satz so gut,
denn er macht mir für die Klausuren Mut.

Uns wird in Theoremen
gar Wunders viel gesagt,
nun woll'n wir unternehmen,
zu dichten unverzagt,

von Helden nicht mit Bärten,
soll hier die Rede sein:
Matrizen, Eigenwerten,
gilt dieser Hymnus mein.

Es lebt im Vektorraum ein
Endomorphismus schlicht,
Und fällt uns nichts im Traum ein,
verstehen wir ihn nicht.

Ob irgendwelche Basen
im Raume existiern,
dass auf der Diagonalen
sich λ's konzentriern,

und außerhalb nur 0en
die Matrixzeilen ziern,
das woll'n wir ohne Schrullen
nun intensiv studiern.

Diagonalisierbar
das f dann wird genannt,
die Basis dann ganz klar
aus Eigenvektorn bestand.

Die λ's Eigenwerte
dann offensichtlich sind.
Doch bringt es manche Härte
bis man sie schließlich find'

$p_f(t)$ den wahren
Goldhort verborgen hält,
sobald in linearen
Faktoren es zerfällt.

Wenn vollkommen verschieden
die Eigenwerte sind,
dann sind wir schon zufrieden
noch eh' das Werk beginnt.

Zu jedem wird erkoren -
(ganz nach Definition
gibt es Eigenvektoren) -
die Basis hat hat man schon.

Doch schwierig wird es dann, da
die Nullstell'n nicht entzweit.
Es gibt so manches λ,
mit großer Vielfachheit.

Und wollen wir nicht leiden
unter dem Lindeworm,
und lieber hier vermeiden
die ganze Jordanform,

dann sei doch jetzt ganz einfach
des E-Raums Dimension
(wir nennen diese Vielfach-
heit geometrisch schon)

nun gleich der algebraisch-
en Vielfachheit der Stell'
in dem charakteristisch-
en Polynom, reell,

komplex oder sonst einer
der Körper, ganz egal,
die Basis nimmt uns keiner,
die ist nach unsrer Wahl

ganz aus Eigenvektoren
so endet dann der Schluß:
Die Matrix, so erkoren
diagonal sein muss.

Auszug aus dem Hauptsatz der affinen Geometrie

Auf einer Weide standen einst, lang ist es her,
Vier Schafe, glücklich waren sie bisher.
Doch nebenan gab's eine große Wiese,
die fanden sie viel schöner noch als diese.

Sie liefen los, doch ein Schaf, das blieb stehen.
Es sprach: "Warum den weiten Weg nur gehen?
Eine Abbildung lasst uns definieren,
Und auns von hier hinüberprojizieren.

2. Schaf:
"Dann ist sie bijektiv zu jeder Zeit,
Und erhält affine Unabhängigkeit.
Und stehen drei von uns hier hinterdrein,
Auch drüben soll's wieder 'ne Gerade sein."

3. Schaf:
"Seht ihr das Viereck, das wir hier ausbreiten?
Seien parallel nun zwei der Seiten,
So frag ich mich jetzt aus dem Bauch:
Sind's ihre Bilder drüben auch?"

4. Schaf:
"Aus der Parallelität folgt wohl sofort,
die Diagonalen schneiden sich an diesem Ort.
Dieser Punkt setzt sich in den Bildern fort,
Drum liegen sie in einer Ebene dort."

3. Schaf:
"Ich verstehe, was du meinst, das leuchtet ein,
So können die Bilder nicht windschief sein.
Doch können wir auch noch den Fall vermeiden,
Dass sie sich in einem Punkte schneiden?"

2. Schaf:
"Wir nehmen doch mal an, der Schnittpunkt existiert,
Dann wird duch die Bijektion ein Urbildpunkt deklariert,
Da der Schnittpunkt zu unseren Bildern affin abhängig ist,
So ist es sein Urbild auch zu uns, ganz ohne Zwist.

1. Schaf:
"Dann müsste das Urbild auf dieser und jener Seite liegen,
Doch da sie parallel sind, werden wir den Punkt nicht kriegen.
Und wenn es schon das Urbild bnicht geben kann,
So gibt es auch keinen Schnittpunkt nebenan."

3. Schaf:
"Damit ist die Sache ja wohl sonnenklar,
Der Beweis geführt, alles ist da."
Und so waren die vier Schafe auch gleich verschwunden,
Hätt' man sie je gesucht, man hätt' sie hier nie mehr gefunden.

Matheleute die sind Spitze,
die kennen die banalsten Witze.
Sei Null echt größer Epsilon,
Wer lacht sonst über sowas schon.

Und uns're größte Freud im Leben,
ist, Sätzen 'nen Beweis zu geben.
Um dies einmal zu demonstrieren,
will ich ein Beispiel hier zitieren.

Es gelte: V sei unitär.
für Vektorräume nicht so schwer.
und selbstadjungiert sei die Eigenschaft f's,
Dann steht für die λ's folgendes fest:

Alle reell,
na das ging mal schnell.

Doch, bevor wir uns freuen, tanzen und lachen,
müssen wir erst den Beweis noch machen.

Nun sitz' ich hier und frag mich nun,
was ist für den Beweis zu tun.

Sei λ nun mal Eigenwert mit Eigenvektor x,
dann ist der Ansatz gar nicht schwer und schreibt sich auf wie nix.
Nimm x mal x skalarweise und λ noch dazu,
Der nächste Schritt wird noch mal knifflig, das läßt mir keine Ruh.

Da x mal x Skalarprodukt, kann λ nun mit rein,
Da freut sich's drüber, denn dann ist's nicht mehr ganz so allein.
x ist Eigenvektor, das wissen wir bereits,
$f(x)$ gleich x mal λ folgt dann wie jeder weiß.

Weil f selbstadjungierend ist,
bedienen wir uns einer List,
1,2,3 und ohne Hetze,
tauschen die Faktor'n die Plätze.

Nun hol'n wir uns λ zurück,
und siehe da, wir haben Glück,
λ kommt nun heraus,
Es ist reell, das folgt daraus.

Der Homomorphiesatz

Einst an der Tafel geschrieben stand:
nehmt Gruppen G und H euch her,
und einen Homomorphismus f nicht schwer,
der die beiden miteinander verband.

Dann kommt ein π kanonisch an,
von G zu G nach Kern f geht
es surjektiv wie ihr schon seht
und Homomorphie bringt es heran.

So finden wir auch ein f quer,
von G nach Kern f führet er,
nach H, ist injektiv.

Ein Homomorphismus ist er noch,
auf π angewendet ergibt er doch
das Gleiche wie f, ganz instinktiv.

Beweis:

Am Anfang will ich erstmal sehn,
ob f quer denn wohldefiniert,
es ist kein wirkliches Problem
ich setze ein - es funktioniert.

Alsdann prüf ich die Homomorphie
und setz' zwei Elemente ein
forme um und habe Schwein,
es klappt, ich bin wohl ein Genie!

Halt, ganz fertig bin ich noch nicht:
die Injektivität muss ans Licht
zwei Elemente wähle ich.

Ihr Bild ist gleich, ich rechne viel,
und bring die Inverse mit ins Spiel
schließlich sind sie identisch.

Die CS-Ungleichung

Cauchy-Schwarz, zwei kluge Männer,
hatten einst ein Norm-Dilemma,

Lebten sie im unitären Raum,
war's Skalarprodukt nur schwer zu überschaun.

Der Vektoren Längen zu multiplizieren,
schien das Skalarprodukt zu disziplinieren,

War'n beide Vektoren vielfachlich,
so glichen beide Seiten sich.

Den Herren so wichtig, sie brachten's zu Papier,
Drum vergess es nicht und merk es dir.

Basisexistenzsatz

Ich liebe Dich,
mein Lieblingssatz
du bist mein allerliebster Schatz,
für meinen Vektorraum und mich.

Ein Körper bildet meinen Raum,
das ist nicht viel und doch genug,
Schon hat er 'ne Basis, oh wie klug,
Das ist, man glaubt es kaum, kein Traum.

Ich sitze hier und denke nach,
Ich lese von all den Dingen
Zu dichten ist mein Lieblingssatz
Nur will das nicht gelingen.

Auf der Suche nach dem Satz
dem Lieblingssatz, dem einen,
gibt es gar zu viel an Auswahl,
keiner mag mir wichtiger als andere erscheinen.

Schon nehm ich meine Übersicht
(von Sätzen) und dreh sie herum,
Da fällt mein Blick auf etwas Nützliches:
Das Untergruppenkriterium.

Nun denn, na schön, so soll es sein,
Wie kann ich nur vermitteln
Den Inhalt schließlich, klar, verständlich
dass keiner kann's bekritteln.

Wir haben also eine Gruppe,
Das ist eine Menge mit bestimmter Struktur,
Wann eine Menge ist eine Untergruppe
dem bin ich hier auf der Spur.

Die Menge muss in der Gruppe enthalten sein,
Erstmal braucht man gar nicht mehr,
Erfüllt diese Menge noch Eigenschaften,
kommen wir der Untergruppe schon näher.

Das Untergruppenkriterium besagt:
Nimm zwei Elemente der Menge her,
Verknüpfe das Eine mit dem Inversen des Anderen,
siehst du das Ergebnis, dann weißt du schon mehr.

Wenn das Ergebnis ein Element der Menge ist,
brauchst du nicht mehr überlegen,
denn diese Menge ist eine Untergruppe,
durch das Untergruppenkriterium gegeben.

Zum Beweis:

Nun: H sei bereits Untergruppe,
Jetzt sollen wir es zeigen,
dass $(g \circ h^{-1})$ in H liegt
Das wird ein Zeichenreigen.

Hier habe ich der Zeichen noch mehr,
denn h^{-1} ist ebenfalls aus H,
Weil H doch eine Gruppe ist,
liegt diese Aussage nah.

Jetzt verknüpfe g aus H mit h^{-1},
und das mache ich so:
$(g \circ h^{-1})$-die Verknüpfung liegt auch in H
Ich verrate gleich, wieso.

Ich wiederhole mich schon wieder:
Eine Gruppe ist H:
abgeschlossen bzgl. Verknüpfung,
$(g \circ h^{-1})$ liegt also drin, das sage ich ja.

Nun ist noch die andere Richtung zu beweisen,
die Voraussetzung liegt auf der Hand:
$(g \circ h^{-1})$ liegt in H für g und h aus der Menge,
dass H Untergruppe ist, ist noch unbekannt.

Gehe hin und tausche
das g gegen das h,
es ergibt sich hiermit: $(h \circ h^{-1})$,
so steht es jetzt da.

Diese Verbindung erweist sich
als dauerhaft und zäh,
die h's neutralisieren sich
es ergibt sich e.

Wie schön! Das neutrale Element
liegt in H-der Menge,
damit folgt auch auf dem Fuß,
h^{-1} hängt ebenfalls im Elementgemenge.

Der letzte Schritt erfolgt jetzt
Zu zeigen ist die Abgeschlossenheit.
Tausche aus das h gegen h^{-1}

Dann heißt es $g \circ h$, na du weißt schon Bescheid,
Das Element, das liegt in H,
Was schließlich zu beweisen war.