Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra/Zahlentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: Montag, 02.07.2007 nach der Vorlesung oder bis 13.00 Uhr im Sekretariat von Prof. Kramer

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben, und
JEDES Blatt mit Namen und Matrikelnummer versehen!

Serie 10 (40 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Ideale eines kommutativen Rings R. Zeigen Sie:

a) Die Summe $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ der Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ist ein Ideal von R. Es ist das kleinste Ideal, das die Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ umfasst.

b) Der Durchschnitt $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ der Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ist ein Ideal von R. Es ist das größte Ideal, das in den Idealen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ enthalten ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Führen Sie den Euklidischen Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers (a, b) von a, b in den beiden folgenden Fällen durch:

(a) $a = 123.456.789$, $b = 555.555.555$ im Ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

(b) $a = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 2X + 1$, $b = X^3 + X^2 - X - 1$ im Polynomring $(\mathbb{Q}[X], +, \cdot)$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Dezimalbruchentwicklung von $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{11}$ und $\frac{1}{7}$.

b) Formulieren Sie ein Kriterium dafür, wann ein Bruch $\frac{a}{b}$ eine abbrechende Dezimalbruchentwicklung besitzt.

c) Finden Sie eine Abschätzung der maximalen Periodenlänge eines Dezimalbruchs in Abhängigkeit vom Nenner. Geben Sie Beispiele an, für die die Periode (im Sinne dieser Abschätzung) maximal ist.

d) Geben Sie ein Verfahren an, mit dem man aus einem gegebenen periodischen Dezimalbruch die Bruchdarstellung $\frac{a}{b}$ zurückgewinnen kann. Wenden Sie dieses Verfahren auf den periodischen Dezimalbruch $0,123123\ldots$ an.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

a) Es sei R ein Hauptidealring. Weiter seien a, b Elemente von R, die nicht beide zugleich gleich dem Nullelement 0 sind. Das Summenideal $(a) + (b)$ ist dann ein Hauptideal, d.h. es gibt ein $d \in R$ mit

$$(a) + (b) = (d).$$

Zeigen Sie: Dann ist d ein größter gemeinsamer Teiler von a und b.

b) Es seien R ein Euklidischer Ring und $p \in R$ ein unzerlegbares Element. Zeigen Sie das Euklidische Lemma für R: Wenn p das Produkt $a \cdot b$ teilt $(a, b \in R)$, dann ist p Teiler von a oder Teiler von b.