HU Berlin Sommersemester 2007

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Algebra/Zahlentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: Montag, 09.07.2007 nach der Vorlesung oder bis 13.00 Uhr im Sekretariat von Prof. Kramer

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben, und
JEDES Blatt mit Namen und Matrikelnummer versehen!

Serie 11 (40 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

a) Finden Sie eine rationale Cauchyfolge mit dem Grenzwert $\sqrt{2}$.

b) Geben Sie Beispiele reeller Cauchyfolgen an, deren Folgenglieder sämtlich irrationale Zahlen sind.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es seien M der Ring aller rationalen Cauchyfolgen und $\mathfrak{n} \subseteq M$ das Ideal der rationalen Nullfolgen. Zeigen Sie, dass die auf dem Körper $\mathbb{R} = M/\mathfrak{n}$ definierte Relation „$<$“ unabhängig von der Wahl der die reelle Zahl α bzw. β repräsentierenden rationalen Cauchyfolge (a_n) bzw. (b_n) ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass mit der Relation „$<$“ die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ eine *geordnete Menge* wird, d.h. dass die drei folgenden Aussagen gelten:

(i) Für je zwei Elemente $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt entweder $\alpha < \beta$ oder $\beta < \alpha$ oder $\alpha = \beta$.

(ii) Die drei Relationen $\alpha < \beta$, $\beta < \alpha$, $\alpha = \beta$ schließen sich gegenseitig aus.

(iii) Aus $\alpha < \beta$ und $\beta < \gamma$ folgt $\alpha < \gamma$.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Zeigen Sie weiterhin, dass die Ordnung „$<$“ auf der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ die folgende Eigenschaft besitzt:
Für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \alpha$, $0 < \beta$ gilt auch $0 < \alpha + \beta$ und $0 < \alpha \cdot \beta$.