Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra/Zahlentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: Montag, 07.05.2007 nach der Vorlesung oder bis 13.00 Uhr im Sekretariat von Prof. Kramer

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben, und
JEDES Blatt mit Namen und Matrikelnummer versehen!

Serie 2 (40 + 10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Beweisen Sie die folgende Aussagen aus der Vorlesung:

- $b \cdot c \,|\, a \cdot c \Rightarrow b \,|\, a \quad (a, b, c \in \mathbb{N};\; b, c \neq 0)$.
- $b_1 \,|\, a_1,\; b_2 \,|\, a_2 \Rightarrow b_1 \cdot b_2 \,|\, a_1 \cdot a_2 \quad (a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{N};\; b_1, b_2 \neq 0)$.
- $b \,|\, a_1,\; b \,|\, a_2 \Rightarrow b \,|\, (c_1 \cdot a_1 + c_2 \cdot a_2) \quad (a_1, a_2, c_1, c_2, b \in \mathbb{N};\; b \neq 0)$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es seien $a_1, \ldots, a_k$ natürliche Zahlen. Ferner sei bekannt, dass $a_1 \cdot \ldots \cdot a_k + 1$ durch 3 teilbar ist.

a) Zeigen Sie, dass keine der Zahlen $a_1, \ldots, a_k$ durch 3 teilbar ist.

b) Beweisen Sie, dass wenigstens eine der Zahlen $a_1 + 1, \ldots, a_k + 1$ durch 3 teilbar ist.

c) Nutzen Sie die Beweisidee des Satzes von Euklid und b), um zu zeigen, dass es sogar in der Teilmenge der natürlichen Zahlen

$$2 + 3 \cdot \mathbb{N} := \{2,\; 2+3,\; 2+6, \ldots,\; 2+3\cdot n, \ldots\}$$

unendlich viele Primzahlen gibt.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Eine Primzahl der Form $p = 2^n - 1$ ($n \in \mathbb{N}$) heißt *Mersennesche Primzahl.* Zeigen Sie: Wenn $2^n - 1$ eine Primzahl ist, dann ist auch n eine Primzahl.
Gilt auch die Umkehrung?

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Eine Primzahl der Form $p = 2^n + 1$ ($n \in \mathbb{N}$) heißt *Fermatsche Primzahl*. Zeigen Sie: Wenn $2^n + 1$ eine Primzahl ist, dann ist $n = 2^m$ mit einem $m \in \mathbb{N}$.
Gilt auch die Umkehrung?

Aufgabe 5* (10 Punkte)

Eine natürliche Zahl n heißt *vollkommen*, falls die Summe all ihrer Teiler $2n$ ergibt, d.h. falls

$$\sum_{d|n} d = 2n$$

gilt.
Beweisen Sie folgende Charakterisierung gerader vollkommener Zahlen, die auf L. Euler zurückgeht:
Eine natürliche Zahl n ist genau dann eine gerade vollkommene Zahl, wenn $n = 2^m \cdot (2^{m+1} - 1)$ mit geeignetem $m \in \mathbb{N}$ ist, wobei $2^{m+1} - 1$ eine Primzahl ist.