Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra/Zahlentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: Montag, 14.05.2007 nach der Vorlesung oder bis 13.00 Uhr im Sekretariat von Prof. Kramer

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben, und
JEDES Blatt mit Namen und Matrikelnummer versehen!

Serie 3 (40 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es sei $n = g_\ell \cdot 10^\ell + \ldots + g_2 \cdot 10^2 + g_1 \cdot 10 + g_0$ $(0 \leq g_j \leq 9;\ j = 0, \ldots, \ell)$ die Dezimaldarstellung von n. Dann heißt

$$Q(n) = g_0 + g_1 + g_2 + \ldots + g_\ell$$

Quersumme von n,

$$Q_a(n) = g_0 - g_1 + g_2 - g_3 + \ldots + (-1)^\ell g_\ell$$

alternierende Quersumme von n und

$$Q_{3a}(n) = (g_0 + g_1 \cdot 10 + g_2 \cdot 10^2) - (g_3 + g_4 \cdot 10 + g_5 \cdot 10^2) \pm \ldots$$

alternierende 3-Block-Quersumme von n. Zeigen Sie:

a) n ist genau dann durch 3 bzw. 9 teilbar, wenn $Q(n)$ durch 3 bzw. 9 teilbar ist.

b) n ist genau dann durch 11 teilbar, wenn $Q_a(n)$ durch 11 teilbar ist.

c) n ist genau dann durch 7 teilbar, wenn $Q_{3a}(n)$ durch 7 teilbar ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

a) Finden Sie die Primfaktorzerlegungen der Zahlen 720, 9.797, 360^{360} und $2^{32} - 1$.

b) Bestimmen Sie die größten gemeinsamen Teiler $(3.600, 3.240)$, $(360^{360}, 540^{180})$ und $(2^{32} - 1, 3^8 - 2^8)$.

c) Bestimmen Sie die kleinsten gemeinsamen Vielfachen $[3.600, 3.240]$, $[360^{360}, 540^{180}]$, $[2^{32} - 1, 3^8 - 2^8]$ und $[36, 42, 49]$.

d) Finden Sie drei natürliche Zahlen a_1, a_2, a_3, die teilerfremd, aber nicht paarweise teilerfremd sind.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es seien a, b natürliche Zahlen mit $b \neq 0$. Wie in der Vorlesung gezeigt, gibt es dann natürliche Zahlen q, r mit $0 \leq r < b$, so dass die Gleichung $a = q \cdot b + r$ gilt.
Zeigen Sie, dass q und r eindeutig bestimmt sind.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Untersuchen Sie, ob folgende Mengen M mit der Verknüpfung $\circ$ eine Halbgruppe oder ein Monoid bilden.

a) $M = \mathbb{N}$, $n \circ m := \max\{n, m\} \quad (m, n \in \mathbb{N})$.

b) $M = \mathbb{N}$, $n \circ m := n^m \quad (m, n \in \mathbb{N})$.

c) $M = \mathrm{Abb}(X)$, $(f_1 \circ f_2)(x) := f_1(f_2(x))$ für alle $x \in X$.

d) $M = \mathrm{Abb}(\mathbb{N})$, $(f_1 \circ f_2)(n) := f_1(n) + f_2(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.