Übungsaufgaben zur Vorlesung

Algebra/Zahlentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: Mittwoch, 30.05.2007 nach der Vorlesung oder bis 13.00 Uhr im Sekretariat von Prof. Kramer

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben, und
JEDES Blatt mit Namen und Matrikelnummer versehen!

Serie 5 (40 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

a) Es sei $f : (G, \circ_G) \longrightarrow (H, \circ_H)$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass für ein Element $g \in G$ stets $\operatorname{ord}_G(g) \geq \operatorname{ord}_H(f(g))$ gilt.

b) Gibt es einen Gruppenisomorphismus zwischen D_{12} und S_4?

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Finden Sie alle Gruppenhomomorphismen $f : (\mathcal{R}_4, \oplus) \longrightarrow (\mathcal{R}_4, \oplus)$.

(b) Seien p eine Primzahl und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, die nicht durch p teilbar ist. Finden Sie alle Gruppenhomomorphismen $g : (\mathcal{R}_p, \oplus) \longrightarrow (\mathcal{R}_n, \oplus)$.

Bestimmen Sie jeweils Kern und Bild dieser Gruppenhomomorphismen.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es sei D_n die aus Serie 4, Aufgabe 4, bekannte Diedergruppe.

a) Es sei b die Drehung um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$. Zeigen Sie, dass die Menge der Drehungen $\{b^k \mid k = 0, \ldots, n-1\}$ eine Untergruppe von D_n bildet.

b) Bestimmen Sie die Menge der Linksnebenklassen D_n/R_n.

c) In Serie 4, Aufgabe 4, wurde bewiesen, dass jedes Element von D_n eindeutig in der Form $a^l \circ b^k$ mit $l \in \{0, 1\}$ und $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ darstellbar ist (hierbei ist $a \in D_n$ eine Spiegelung).

Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\operatorname{sgn} : (D_n, \circ) \longrightarrow (\{\pm 1\}, \cdot),$$

gegeben durch die Zuordnung $a^l \circ b^k \mapsto (-1)^l$, ein Gruppenhomomorphismus ist, und berechnen Sie Kern und Bild von sgn.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

(a) Folgern Sie aus dem Satz von Lagrange, dass in einer endlichen Gruppe die Ordnung eines Elements stets ein Teiler der Gruppenordnung ist.

(b) Schließen Sie daraus, dass eine Gruppe von Primzahlordnung zyklisch ist.

(c) Bestimmen Sie alle möglichen Gruppen der Ordnungen 4 und 6 bis auf Gruppenisomorphie.