HU Berlin Sommersemester 2007

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra/Zahlentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: Montag, 18.06.2007 nach der Vorlesung oder bis 13.00 Uhr im Sekretariat von Prof. Kramer

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben, und
JEDES Blatt mit Namen und Matrikelnummer versehen!

Serie 8 (40 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

a) Beweisen Sie:

Es seien a, b teilerfremde ganze Zahlen. Dann existieren ganze Zahlen x, y mit der Eigenschaft

$$x \cdot a + y \cdot b = 1.$$

Hinweis:

- Betrachten Sie die Menge

$$\mathfrak{a} := \{x_1 \cdot a + y_1 \cdot b \,|\, x_1, y_1 \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}.$$

Zeigen Sie unter Verwendung des Prinzips des kleinsten Elements für die Menge $\mathfrak{a} \cap \mathbb{N}$, dass $\mathfrak{a}$ ein kleinstes positives Element

$$d = x_0 \cdot a + y_0 \cdot b \qquad (x_0, y_0 \in \mathbb{Z})$$

besitzt.

- Zeigen Sie unter Verwendung der Division mit Rest, dass $d = 1$ gilt.

b) Benutzen Sie a), um einen alternativen Beweis des Euklidischen Lemmas zu erhalten, der nicht auf dem Fundamentalsatz der Arithmetik beruht.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Zeigen Sie, dass dann für $a, b, c \in R$ die folgenden Rechenregeln gelten:

(i) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.

(ii) $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$.

(iii) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

(iv) $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$.

(v) $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Einheiten eines Rings $(R, +, \cdot)$ mit Einselement 1 mit der Multiplikation eine Gruppe bilden.

b) Bestimmen Sie die Gruppe der Einheiten für die Ringe $(\mathcal{R}_n, \oplus, \odot)$, wobei $n = 5, 8, 10, 12$ ist. Welche dieser Gruppen sind zueinander isomorph?

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Wir definieren den *Polynomring* $(R[X], +, \cdot)$ *in der Variablen* X *mit Koeffizienten aus* R als die Menge

$$R[X] := \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} a_j \cdot X^j \,\middle|\, a_j \in R,\ a_j = 0 \text{ für fast alle } j \in \mathbb{N} \right\}$$

mit den Verknüpfungen

$$\left(\sum_{j \in \mathbb{N}} a_j \cdot X^j \right) + \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} b_j \cdot X^j \right) := \sum_{j \in \mathbb{N}} (a_j + b_j) \cdot X^j,$$
$$\left(\sum_{j \in \mathbb{N}} a_j \cdot X^j \right) \cdot \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} b_j \cdot X^j \right) := \sum_{j \in \mathbb{N}} \left(\sum_{\substack{k,\ell \in \mathbb{N} \\ k+\ell=j}} (a_k \cdot b_\ell) \right) \cdot X^j.$$

a) Zeigen Sie, dass $(R[X], +, \cdot)$ ein Ring ist.

b) Beweisen Sie, dass $R[X]$ genau dann kommutativ ist, wenn R kommutativ ist.

c) Weisen Sie nach, dass die Einheiten von $R[X]$ genau den Einheiten von R entsprechen.