Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra/Zahlentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: Montag, 25.06.2007 nach der Vorlesung oder bis 13.00 Uhr im Sekretariat von Prof. Kramer

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben, und
JEDES Blatt mit Namen und Matrikelnummer versehen!

Serie 9 (40 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

a) Es seien $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Einselement 1 und $\mathfrak{a}$ ein Ideal von R, so dass $1 \in \mathfrak{a}$ ist. Zeigen Sie, dass dann $\mathfrak{a} = R$ gilt.

b) Finden Sie ein Ideal von $(\mathbb{Z}[X], +, \cdot)$, von dem Sie nachweisen, dass es kein Hauptideal ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Zeigen Sie für Elemente $a, b, c, d \in K$ die folgenden Rechenregeln:

(i) Falls $b, c \neq 0$ sind, gilt:
$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}.$$

(ii) Falls $b, d \neq 0$ sind, gilt:
$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{b \cdot d}.$$

(iii) Falls $b, d \neq 0$ sind, gilt:
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und $\mathfrak{a} \subsetneq R$ ein echtes Ideal. Das Ideal $\mathfrak{a}$ heißt *Primideal*, wenn für alle $r, s \in R$ aus $r \cdot s \in \mathfrak{a}$ stets $r \in \mathfrak{a}$ oder $s \in \mathfrak{a}$ folgt. Das Ideal $\mathfrak{a}$ heißt *maximal*, wenn R das einzige Ideal ist, das $\mathfrak{a}$ echt umfasst.
Zeigen Sie:

a) $R/\mathfrak{a}$ ist genau dann ein Integritätsbereich, wenn $\mathfrak{a}$ ein Primideal ist.

b) $R/\mathfrak{a}$ ist genau dann ein Körper, wenn $\mathfrak{a}$ maximal ist.

c) Jedes maximale Ideal ist ein Primideal.

d) R ist genau dann ein Körper, wenn (0) das einzige maximale Ideal ist.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Vervollständigen Sie den Beweis des Satzes über die Existenz des Quotientenkörpers, indem Sie die Assoziativität von $\oplus$, die Kommutativität von $\odot$ und eines der beiden Distributivgesetze nachweisen.