Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra I
Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 25.10.2006 nach der Übung im Raum RUD 25, 1.114 oder bis 13.00 Uhr, Sekretariat Prof. Kramer

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben, und
JEDES Blatt mit Namen und Matrikelnummer versehen!

Serie 1 (30+20 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Wiederholen Sie folgende Aufgaben aus dem ersten Semester:

a) Zeigen Sie, dass Untergruppen vom Index 2 Normalteiler sind.

b) Jede endlich erzeugte Untergruppe von $(\mathbb{Q}, +)$ ist isomorph zur Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$.

c) Sei $V_4 = \{(), (12)(34), (13)(24), (14)(32)\} \leq S_4$ gegeben. Man zeige, dass V_4 Normalteiler in S_4 ist und folgende Isomorphie besteht:

$$S_4/V_4 \cong S_3.$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Gegeben sei folgende Permutation $\sigma \in S_8$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 2 & 1 & 7 & 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Schreiben Sie σ in Zykelschreibweise und als Produkt von Transpositionen!

b) Sei $\tau \in S_8$ die Permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Finden Sie eine Permutation $\pi \in S_8$, so dass $\pi^{-1}\tau\pi = \sigma$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Eine Permutation $\mu \in S_n$ heißt Mischung vom Typ $(k, n-k)$, wenn $\mu(1) < \cdots < \mu(k)$ und $\mu(k+1) < \cdots < \mu(n)$ gilt.
(Veranschaulichung: Teilen eines Blattes Spielkarten in zwei Haufen, die durch Zusammenblättern gemischt werden).
Wir definieren

$$a(\mu) := \sum_{j=1}^{k} (\mu(j) - j) = \sum_{j=k+1}^{n} (j - \mu(j)).$$

a) Wieviele Mischungen vom Typ $(k, n-k)$ gibt es?

b) Zeigen Sie, dass die zweite Gleichheit in der Definition von $a(\mu)$ gilt.

c) Verifizieren Sie die Beziehung $\operatorname{sgn}(\mu) = (-1)^{a(\mu)}$.

Aufgabe 4* (10 Punkte)

Die Abbildung $\exp : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ ist ein Isomorphismus. Gibt es auch einen Isomorphismus der Gruppen $(\mathbb{Q}, +)$ und $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$?

Aufgabe 5* (10 Punkte)**

Wir definieren die Funktion $\Omega : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ wie folgt: $\Omega(n)$ ist die höchste Ordnung eines Elementes aus S_n. Versuchen Sie, etwas über diese Funktion herauszufinden (Algorithmen zur Bestimmung, Programme, Werte für kleines n, Abschätzungen, Formeln etc.).