HU Berlin Wintersemester 2006/07

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra I
Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 08.01.2007 nach der Vorlesung oder bis 11.00 Uhr, Sekretariat Prof. Kramer

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben, und
JEDES Blatt mit Namen und Matrikelnummer versehen!

Serie 10 (30+20 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es seien R ein kommutativer Ring mit Einselement und $\mathfrak{p}$ sowie $\mathfrak{m}$ Ideale in R. Zeigen Sie:

a) Das Ideal $\mathfrak{p}$ ist genau dann ein Primideal, wenn $R/\mathfrak{p}$ ein Integritätsbereich ist.

b) Das Ideal $\mathfrak{m}$ ist genau dann ein Maximalideal, wenn $R/\mathfrak{m}$ ein Körper ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es seien R ein Integritätsbereich mit Quotientenkörper $\mathrm{Quot}(R)$ und $S \subseteq R$ eine multiplikativ abgeschlossene Menge, so dass $0 \notin S$ und $1 \in S$. Wir definieren die *Lokalisierung von R in S* durch

$$R_S := \left\{ \frac{r}{s} \;\middle|\; r \in R,\, s \in S \right\}.$$

a) Zeigen Sie, dass R_S ein Unterring von $\mathrm{Quot}(R)$ ist.

b) Zeigen Sie, dass sich der Integritätsbereich R natürlich in R_S einbetten lässt.

c) Bestimmen Sie alle maximalen Ideale von R_S.

d) Es seien $\mathfrak{p} \subsetneq R$ ein echtes Primideal und $S = R \setminus \mathfrak{p}$. Zeigen Sie, dass S die oben genannten Eigenschaften hat. Definieren Sie $R_{\mathfrak{p}} := R_S$ und zeigen Sie, dass eine Bijektion zwischen den Primidealen von $R_{\mathfrak{p}}$ und den in $\mathfrak{p}$ enthaltenen Primidealen von R besteht.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $\alpha = 1 + (\sqrt[3]{2})^2$ über $\mathbb{Q}$.

b) Bestimmen Sie die Minimalpolynome von $\alpha = \sqrt{3}+\sqrt{5}$ über den Körpern $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{15})$.

Aufgabe 4 (10 Punkte)**

Gibt es einen Schiefkörper mit endlich vielen Elementen, der kein Körper ist?

Aufgabe 5*** (10 Punkte)**

Wir hatten als Lösung der Pfingstaufgabe 2006 (Übung zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie II, Serie 7, Aufgabe 5) fünf Typen von Graphen erhalten: Zwei unendliche Serien und drei weitere.
Ebenso hatten wir am Ende der Vorlesung vom 04.12.2006 gesehen, dass es fünf Typen von endlichen Untergruppen der $SO_3(\mathbb{R})$ gibt: Zwei unendliche Serien (zyklische und Diedergruppen) und drei weitere (Tetraedergruppe, Oktaedergruppe und Dodekaedergruppe).
Versuchen Sie, ob Sie zwischen beiden Sachverhalten einen Zusammenhang herstellen können.