HU Berlin Wintersemester 2006/07

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra I

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 22.01.2007 nach der Vorlesung oder bis 11.00 Uhr, Sekretariat Prof. Kramer

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben, und
JEDES Blatt mit Namen und Matrikelnummer versehen!

Serie 12 (30+10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Bestimmen Sie das Inverse von

$$\alpha = \left(\sqrt[3]{13}\right)^2 + 2\sqrt[3]{13} + 1$$

im Körper $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{13}\right)$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es seien $K, L \subseteq E$ zwei Unterkörper von E. Wir definieren das *Kompositum* $K \cdot L$ als minimalen Unterkörper von E, der K und L enthält.

a) Zeigen Sie: $K \cdot L = \left\{ \frac{\sum_{j=1}^{r} \kappa_j \lambda_j}{\sum_{j=1}^{s} \kappa'_j \lambda'_j} \;\middle|\; \kappa_j, \kappa'_j \in K;\ \lambda_j, \lambda'_j \in L;\ \sum_{j=1}^{s} \kappa'_j \lambda'_j \neq 0 \right\}$.

b) Zeigen Sie: Sind K, L algebraisch über einem Körper F, so ist so ist auch das Kompositum $K \cdot L$ algebraisch über F.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es sei $E = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt[3]{7})$. Bestimmen Sie ein konkretes $\vartheta \in E$ mit der Eigenschaft $E = \mathbb{Q}(\vartheta)$. Benutzen Sie zur Konstruktion von ϑ das im Beweis des Satzes vom primitiven Element angegebene Verfahren.

Aufgabe 4* (10 Punkte)

Finden Sie den Fehler in folgendem „Beweis“ der Existenz eines algebraischen Abschlusses des Körpers K:
Wir betrachten die Menge der algebraischen Körpererweiterungen von K mit der Inklusion als partieller Ordnung. Für eine Kette algebraischer Erweiterungen $(K_j)_{j \in I}$ ist auch die Vereinigung $\bigcup_{j \in I} K_j$ algebraisch, also ist die Menge induktiv geordnet. Nach dem Lemma von Zorn gibt es ein maximales Element, also einen algebraisch abgeschlossenen Körper, der K enthält.